Казахский национальный университет имени аль-Фараби

Факультет механико-математический

Кафедра механики

Образовательная программа «7M05405 – Механика и энергетика» · магистратура

Дисциплина: Методы подобия и размерности в механике

Лекция № 3

П-теорема и метод подобия

Преподаватель: Туралина Динара Елеусизовна

к.ф.-м.н., ассистент-профессор

Алматы, 2026 год

Зачем нужна П-теорема

Рассмотренные примеры показывают: анализ размерностей **не является универсальным** методом, автоматически находящим зависимости между величинами. Существенную помощь оказывает **П-теорема** (теорема Бакингема — Федермана — Рябушинского).

Исходные данные

полный список величин $a_1, \ldots, a_n$, определяющих процесс, — включая размерные постоянные (g, G, c)

Результат

минимальный набор безразмерных параметров, через которые выражается любая закономерность

Следствие

законы подобия: процессы с равными П-параметрами подобны

$$f(a_1, a_2, \ldots, a_n) = 0 \qquad (1)$$

Величины с независимыми размерностями

Пусть из n величин в (1) **k** обладают независимыми размерностями (первые k). Их можно принять за основные:

$$[a_1] = A_1, \quad [a_2] = A_2, \quad \ldots, \quad [a_k] = A_k \tag{2}$$

Размерности остальных величин выражаются через них:

$$[a_{k+1}] = A_1^{p_1} A_2^{p_2} \cdots A_k^{p_k}, \quad \ldots, \quad [a_n] = A_1^{q_1} A_2^{q_2} \cdots A_k^{q_k} \tag{3}$$

Число k равно рангу матрицы размерностей:

$$k = \operatorname{rank} \mathcal{D}, \qquad \mathcal{D} = \|\alpha_{ij}\|, \quad [a_j] = L^{\alpha_{1j}} M^{\alpha_{2j}} T^{\alpha_{3j}}$$

Доказательство П-теоремы

Так как $a_1, \ldots, a_k$ имеют независимые размерности, их единицы можно менять **произвольно и независимо**. Изменим единицы так, чтобы каждая из них стала равна 1: умножим их на $1/a_1, \ldots, 1/a_k$.

Значения остальных n − k величин по формулам размерности станут

$$\Pi_{k+1} = \frac{a_{k+1}}{a_1^{p_1} a_2^{p_2} \cdots a_k^{p_k}}, \quad \ldots, \quad \Pi_n = \frac{a_n}{a_1^{q_1} a_2^{q_2} \cdots a_k^{q_k}} \tag{4}$$

и уравнение (1) примет вид

$$f(1, \ldots, 1, \Pi_{k+1}, \ldots, \Pi_n) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad F(\Pi_{k+1}, \ldots, \Pi_n) = 0 \tag{5}$$

Почему П безразмерны

Размерность числителя a_{k+1} совпадает с размерностью знаменателя $a_1^{p_1} \ldots a_k^{p_k}$.

Инвариантность

Исходные $a_1, \ldots, a_k$ были произвольными, поэтому (5) верно при любом выборе единиц.

Формулировка П-теоремы

Если n величин связаны функциональной зависимостью и k из них обладают независимыми размерностями, то эта зависимость может быть представлена как зависимость между **n – k безразмерными комбинациями** Π_{k+1}, …, Π_n, составленными из этих величин.

$$\Pi_{k+1} = \Phi(\Pi_{k+2}, \ldots, \Pi_n)$$

n – k ≥ 2

ответ содержит неизвестную функцию; её находят теорией или экспериментом

n – k = 1

задача наиболее определённа: П = const, ответ находится с точностью до числа

Выбор базиса

a_1, …, a_k выбирают из соображений удобства; разные базисы дают эквивалентные П

Пример 1: сопротивление шара в потоке

Сила сопротивления F шара диаметра d в потоке жидкости плотности ρ и вязкости μ со скоростью U. n = 5, k = 3 (базис ρ, U, d):

$$F = f(\rho, U, d, \mu) \quad \Rightarrow \quad \frac{F}{\rho U^2 d^2} = \Phi\left(\frac{\rho U d}{\mu}\right)$$

Традиционная запись — коэффициент сопротивления как функция числа Рейнольдса:

$$C_D = \frac{F}{\frac{1}{2}\rho U^2 \cdot \pi d^2/4} = \Phi(\mathrm{Re}), \qquad \mathrm{Re} = \frac{\rho U d}{\mu}$$

	F	ρ	U	d	μ
L	1	−3	1	1	−1
M	1	1	0	0	1
T	−2	0	−1	0	−1

базис: ρ, U, d

$$\operatorname{rank} \mathcal{D} = 3$$

$$n - k = 5 - 3 = 2$$

$$\Rightarrow \; C_D = \Phi(\mathrm{Re})$$

Матрица размерностей задачи о сопротивлении шара

Вместо функции четырёх переменных F(ρ, U, d, μ) — функция одной переменной Φ(Re).

Кривая сопротивления шара

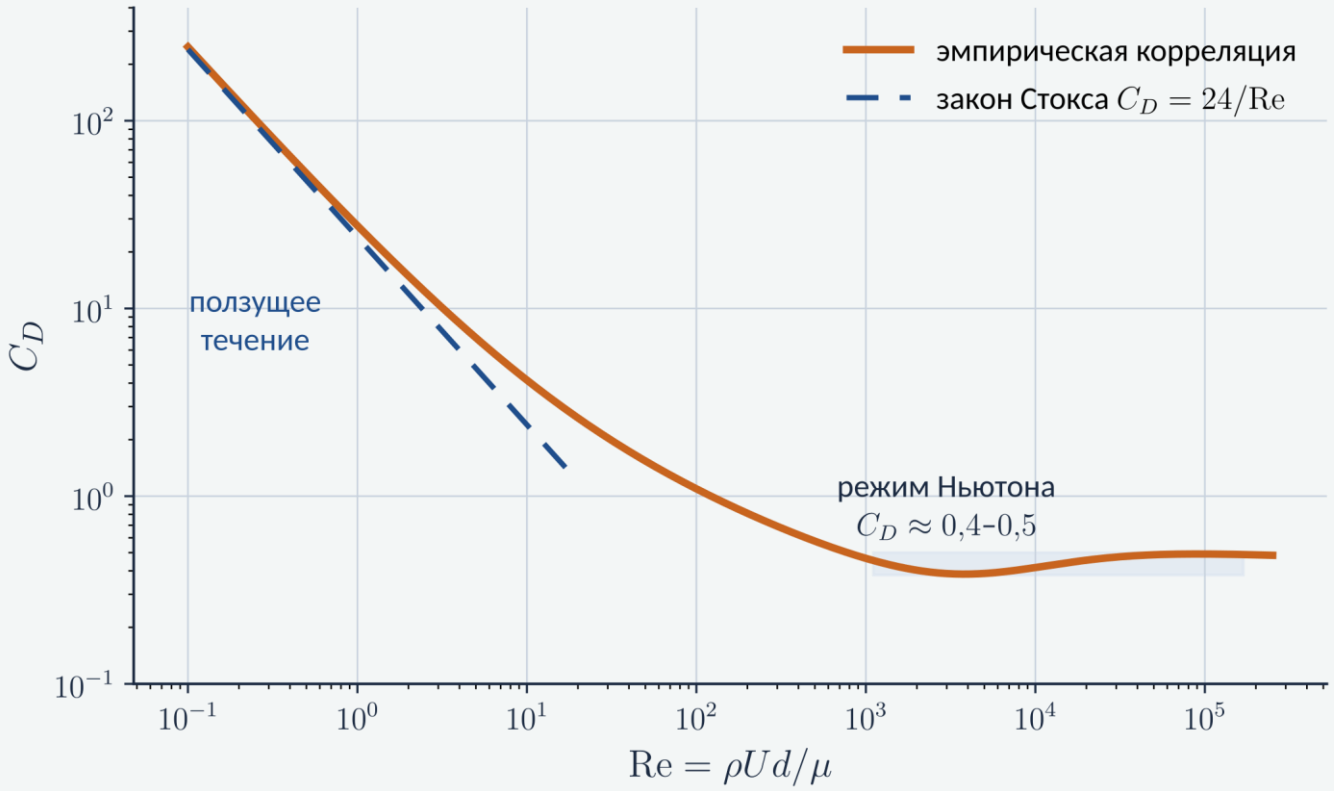
Опыты с разными жидкостями, скоростями и диаметрами ложатся на **одну кривую** $C_D(\mathrm{Re})$.

При малых Re — решение Стокса:

$$\mathrm{Re} \ll 1: \quad F = 3\pi\mu U d \quad \Leftrightarrow \quad C_D = \frac{24}{\mathrm{Re}}$$

При $10^3 \lesssim \mathrm{Re} \lesssim 2\cdot10^5$ (режим Ньютона) $C_D \approx 0{,}4–0{,}5$ почти постоянен: $F \propto \rho U^2 d^2$.

Резкое падение C_D при $\mathrm{Re} \approx 3\cdot10^5$ (кризис сопротивления) связано с переходом к турбулентному пограничному слою.



Коэффициент сопротивления шара (эмпирическая корреляция Клифта — Говена)

Пример 2: точечный сильный взрыв

Радиус ударной волны R при мгновенном выделении энергии E в газе плотности ρ_0 (противодавлением пренебрегаем):

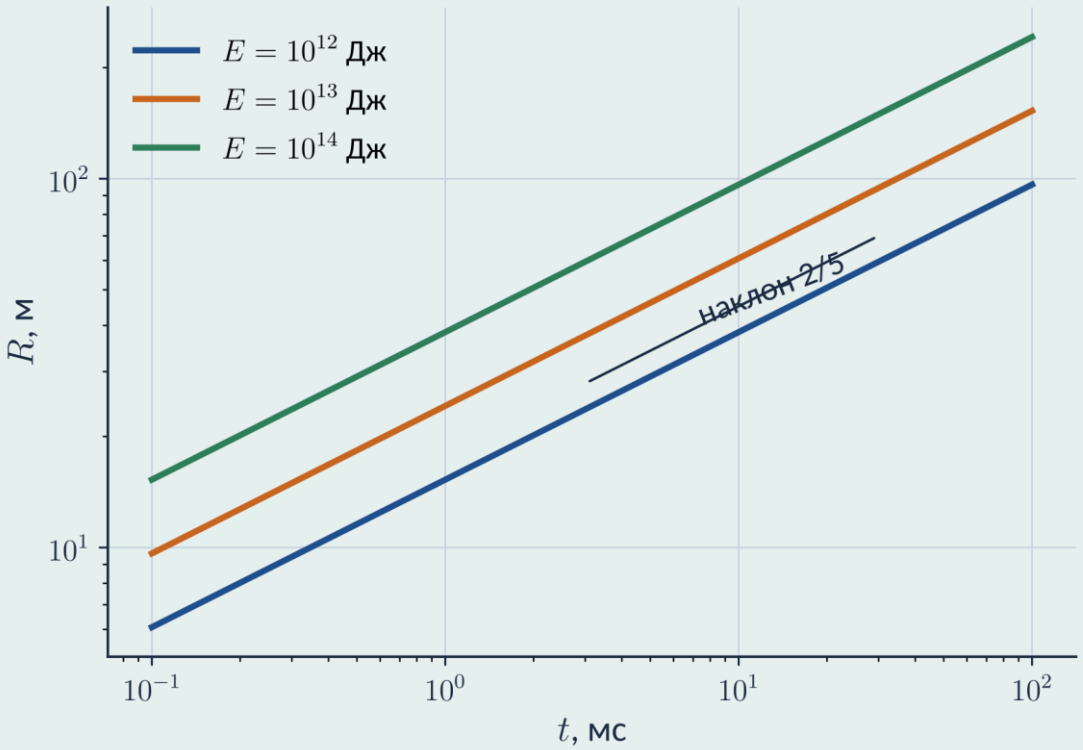
$$R = f(E, \rho_0, t) \quad \Rightarrow \quad n - k = 4 - 3 = 1$$

Единственная безразмерная комбинация $R^5\rho_0/(Et^2)$ = const, откуда

$$R = C\left(\frac{E\,t^2}{\rho_0}\right)^{1/5}, \qquad C \approx 1$$

По фотографиям огненного шара Дж. Тейлор (1950) оценил энергию первого ядерного взрыва, не имея засекреченных данных.

$R \propto t^{2/5}$: в логарифмических координатах — прямая с наклоном 2/5.



Радиус ударной волны по формуле Тейлора (ρ_0 = 1,2 кг/м³, C = 1)

Пример 3: период маятника по П-теореме

Период T_0 зависит от l, g, m, ϕ_0. С T_0 это n = 5 величин, k = 3:

$$T_0 = f(l, g, m, \varphi_0): \quad n = 5,\ k = 3 \ \Rightarrow\ T_0\sqrt{g/l} = \theta(\varphi_0)$$

Базис

l, g, m — независимые размерности L, LT^{-2}, M

П-параметры

$\Pi_1 = T_0\sqrt{(g/l)}$, $\Pi_2 = \phi_0$ (масса не входит ни в один П)

Ответ

$T_0 = \sqrt{(l/g)}\cdot\theta(\phi_0)$; при $\phi_0 \to 0$ $\theta \to 2\pi$ (лекция 2)

Если бы параметров было 4 (n − k = 1, без ϕ_0), период определялся бы однозначно: $T_0 = C\sqrt{(l/g)}$. Константа C = 2π находится из решения задачи или одного опыта.

П-теорема и метод подобия

Если у двух процессов (натурного и модельного) **все определяющие П-параметры одинаковы**, то одинаковы и все искомые безразмерные величины: процессы **подобны**.

Равные П-параметры называют **критериями подобия**; их записывают «idem».

Пример: модель шара в воде и натурный шар в воздухе — при равных Re коэффициенты C_D совпадают.

Натура

воздух: $\nu \approx 1{,}5\cdot10^{-5}$ м²/с; d = 1 м; U = 15 м/с; $Re = 10^6$

Модель

вода: $\nu \approx 1{,}0\cdot10^{-6}$ м²/с; d = 0,1 м; для $Re = 10^6$ нужна U = 10 м/с

Типичные ошибки применения П-теоремы

Ошибка	Последствие	Как избежать
Пропущен существенный параметр	неверная зависимость	анализировать уравнения и граничные условия
Включён несущественный параметр	лишний П, усложнение ответа	оценивать порядки величин
Неверно определено k	неверное число П-параметров	вычислять ранг матрицы размерностей
Забыты размерные постоянные (g, G)	задача кажется «неразрешимой»	включать их в список $a_1, \ldots, a_n$
П-параметры зависимы	неоднозначная обработка опытов	проверять независимость векторов показателей

Заключение и вопросы для самоконтроля

Выводы

1. Если n величин связаны зависимостью и k из них имеют независимые размерности, зависимость сводится к n − k безразмерным П-параметрам.
2. k равно рангу матрицы размерностей; $П = a_j / (a_1 p_1 \dots a_k p_k)$.
3. При n − k = 1 ответ определён с точностью до константы (взрыв Тейлора).
4. Сопротивление шара: CD = Φ(Re) — одна кривая для всех жидкостей и размеров.
5. Равенство П-параметров — условие подобия процессов.

Контрольные вопросы

1. Сформулируйте П-теорему.
2. Как определить число k величин с независимыми размерностями?
3. Докажите П-теорему.
4. Почему при n − k = 1 задача наиболее определённа?
5. Получите зависимость CD = Φ(Re) для сопротивления шара.
6. Выведите формулу Тейлора для радиуса ударной волны.
7. Как связаны П-теорема и теория подобия?
8. Какие ошибки возможны при выборе определяющих параметров?