Казахский национальный университет имени аль-Фараби

Факультет механико-математический

Кафедра механики

Образовательная программа «7M05405 – Механика и энергетика» · магистратура

Дисциплина: Методы подобия и размерности в механике

Лекция № 6

Подобие гидродинамических процессов. Критерии подобия

Преподаватель: Туралина Динара Елеусизовна

к.ф.-м.н., ассистент-профессор

Алматы, 2026 год

Метод подобия и моделирование

Метод подобия используется при изучении многих физических и технических задач, в частности при **моделировании** действительных, «натурных» процессов в лабораторных условиях.

Результаты модельных испытаний переносят на проектирование реальных объектов: судов, самолётов, гидротехнических сооружений, теплообменников.

Приём: привести уравнения и граничные условия к безразмерному виду и потребовать их совпадения для натуры и модели.

Натура

реальный объект: размер L, скорость v_0, среда с ν, ρ

Модель

лабораторный аналог: $L' = L/\lambda$, иные v_0', ν', ρ'

Условие переноса

равенство критериев подобия натуры и модели

Безразмерные переменные

Рассмотрим условия подобия двух изотермических ламинарных потоков вязких несжимаемых жидкостей с различными плотностями и вязкостями. Введём безразмерные переменные:

$$t' = \frac{t}{t_0}, \quad \vec{x}' = \frac{\vec{x}}{L}, \quad \nabla' = L\nabla, \quad \vec{v}' = \frac{\vec{v}}{v_0}, \quad p' = \frac{p}{p_0}, \quad \vec{F}' = \frac{\vec{F}}{F_0} \tag{1}$$

t_0, L

масштабы времени и длины (координат)

v_0, p_0

масштабы скорости и давления

F_0

масштаб объёмных (массовых) сил

Масштабы выбирают так, чтобы безразмерные величины и их производные имели порядок единицы.

Уравнения Навье — Стокса в безразмерной форме

В переменных (1) уравнения движения вязкой несжимаемой жидкости принимают вид (штрихи опущены):

$$\mathrm{Sh}\,\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + (\vec{v}\cdot\nabla)\vec{v} = \frac{1}{\mathrm{Fr}}\vec{F} - \mathrm{Eu}\,\nabla p + \frac{1}{\mathrm{Re}}\nabla^2\vec{v}, \qquad \nabla\cdot\vec{v} = 0 \tag{2}$$

где

$$\mathrm{Sh} = \frac{L}{v_0 t_0}, \qquad \mathrm{Fr} = \frac{v_0^2}{F_0 L}, \qquad \mathrm{Eu} = \frac{p_0}{\rho v_0^2}, \qquad \mathrm{Re} = \frac{v_0 L}{\nu}$$

Струхаль Sh

нестационарность

Фруд Fr

инерция / массовые силы

Эйлер Eu

давление / инерция

Рейнольдс Re

инерция / вязкость

Условия подобия потоков

Если два (в общем случае нестационарных) потока подобны, то безразмерные уравнения Навье — Стокса и безразмерные граничные и начальные условия **одинаковы** для обоих движений.

Для совпадения уравнений нужно потребовать равенства чисел подобия:

$$\mathrm{Sh}_1 = \mathrm{Sh}_2, \quad \mathrm{Fr}_1 = \mathrm{Fr}_2, \quad \mathrm{Eu}_1 = \mathrm{Eu}_2, \quad \mathrm{Re}_1 = \mathrm{Re}_2 \tag{3}$$

Дополнительно: геометрическое подобие границ и подобие граничных и начальных условий.

Числа подобия

все безразмерные комплексы, входящие в уравнения: Sh, Fr, Eu, Re

Критерии подобия

числа, составленные только из заданных наперёд масштабов и констант среды

Критерии и определяемые числа

Критериями подобия называют числа подобия, составленные только из тех масштабов и физических констант, которые **заданы в постановке задачи**. Критериев меньше, чем чисел подобия: не все масштабы, введённые при обезразмеривании, известны заранее.

Число	Содержит	Роль в задаче обтекания
$Re = v_o L/\nu$	заданные v_o, L, ν	критерий подобия (определяющий)
$Sh = L/(v_o t_o)$	заданный масштаб времени t_o	критерий, если t_o задан (например, частота колебаний тела)
$Fr = v_o^2/(F_o L)$	заданные v_o, L, $F_o = g$	критерий при наличии свободной поверхности
$Eu = p_o/(\rho v_o^2)$	неизвестный масштаб давления p_o	определяемое число: $Eu = \Phi(Re, Sh, Fr)$

Пример: сопротивление цилиндра

Цилиндр диаметра d обтекается однородным потоком (ν, ρ, v_0). Движение стационарно, объёмных сил нет. Из условий (3) остаются:

$$\mathrm{Eu}_1 = \mathrm{Eu}_2, \qquad \mathrm{Re}_1 = \mathrm{Re}_2 = \frac{v_0 d}{\nu}$$

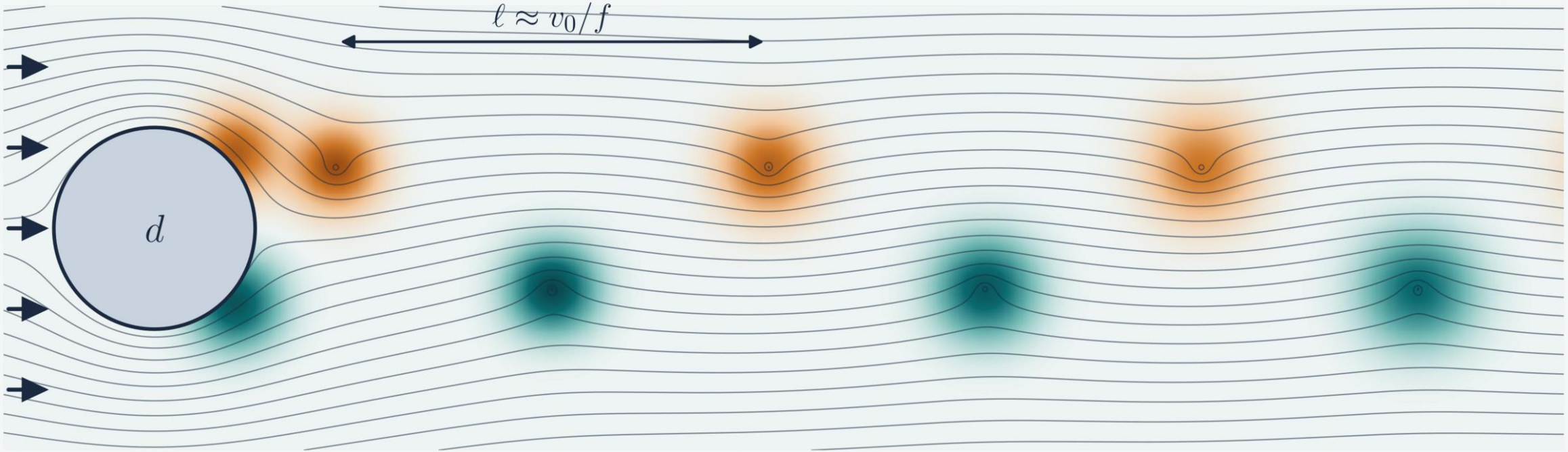
Re — критерий подобия (масштабы v_0, d и константа ν заданы). Сила сопротивления R находится лишь после решения задачи, поэтому Eu — функция Re. Коэффициент сопротивления единицы длины:

$$C_R = \frac{R}{\frac{1}{2}\rho v_0^2\,\sigma} = C_R(\mathrm{Re})$$

σ — площадь миделевого сечения; R/σ имеет размерность давления, поэтому C_R играет роль числа Эйлера.



Нестационарность: вихревая дорожка Кармана



Вихревая дорожка Кармана за цилиндром: вихри противоположных знаков срываются попеременно

$$\mathrm{St} = \frac{f\,d}{v_0} \approx 0{,}2 \qquad (10^2 \lesssim \mathrm{Re} \lesssim 10^5)$$

Частота срыва вихрей f — определяемая величина: Sh = fd/v_0 = Φ(Re).
Пример: провод d = 1 см при ветре 10 м/с «поёт» на частоте ≈ 200 Гц.

Пример: модельный эксперимент

Для подобия стационарного обтекания достаточно равенства чисел Рейнольдса натуры (н) и модели (м):

$$\mathrm{Re}_{\text{м}} = \mathrm{Re}_{\text{н}} \;\Rightarrow\; v_{\text{м}} = v_{\text{н}}\,\frac{d_{\text{н}}}{d_{\text{м}}}\,\frac{\nu_{\text{м}}}{\nu_{\text{н}}}$$

Пример. Опора моста d = 2 м в реке, v = 1 м/с (вода). Модель 1 : 20 испытывают в воде: $v_{м}$ = 20 м/с — практически неосуществимо.

Поэтому часто довольствуются автомодельностью: при больших Re коэффициент C_R почти не зависит от Re.

Автомодельность по Re

При $10^3 \lesssim \mathrm{Re} \lesssim 2\cdot10^5$ $C_R \approx 1{,}0–1{,}2$: достаточно, чтобы Re модели попал в ту же область.

Смена среды

Для аэродинамических труб используют воду или сжатый газ, уменьшая ν модели.

Алгоритм установления подобия по уравнениям

1. Записать полную систему уравнений, граничных и начальных условий
2. Выбрать масштабы и привести систему к безразмерному виду
3. Выписать числа подобия — множители при членах уравнений и условий
4. Разделить их на критерии (из заданных величин) и определяемые числа
5. Потребовать равенства критериев для натуры и модели; определяемые числа — функции критериев

Сравнение подхода П-теоремы и анализа уравнений

	П-теорема (лекция 3)	Анализ уравнений (лекция 6)
Исходные данные	список определяющих параметров	система уравнений и граничных условий
Результат	набор безразмерных комплексов	критерии подобия с ясным физическим смыслом
Преимущество	не требует знания уравнений	показывает роль каждого члена уравнения
Риск	пропуск существенного параметра	ошибка в постановке или граничных условиях
Пример	$C_D = Φ(Re)$ для шара	$C_R = Φ(Re)$, $Sh = Φ(Re)$ для цилиндра

Заключение и вопросы для самоконтроля

Выводы

1. Подобие потоков вязкой несжимаемой жидкости устанавливается приведением уравнений Навье — Стокса к безразмерному виду.
2. В уравнения входят числа подобия Sh, Fr, Eu, Re; подобие требует их равенства (3) и подобия граничных условий.
3. Критерии подобия составлены только из заданных масштабов и констант; Eu с неизвестным p_o — определяемое число.
4. Обтекание цилиндра: Re — критерий, $C_R = C_R(Re)$, $Sh = \Phi(Re)$.
5. При моделировании часто используют автомодельность по Re.

Контрольные вопросы

1. Как вводятся безразмерные переменные (1)?
2. Запишите уравнения Навье — Стокса в безразмерном виде (2).
3. Каков физический смысл чисел Sh, Fr, Eu, Re?
4. Чем критерии подобия отличаются от чисел подобия?
5. Почему число Эйлера в задаче обтекания цилиндра не является критерием?
6. Что такое коэффициент сопротивления и от чего он зависит?
7. Что такое число Струхаля и вихревая дорожка Кармана?
8. Что такое автомодельность по числу Рейнольдса?