Казахский национальный университет имени аль-Фараби

Факультет механико-математический

Кафедра механики

Образовательная программа «7M05405 – Механика и энергетика» · магистратура

Дисциплина: Методы подобия и размерности в механике

Лекция № 1

Физические величины и их размерности. Формулы размерности

Преподаватель: Туралина Динара Елеусизовна

к.ф.-м.н., ассистент-профессор

Алматы, 2026 год

Размерные и безразмерные величины

Размерные величины

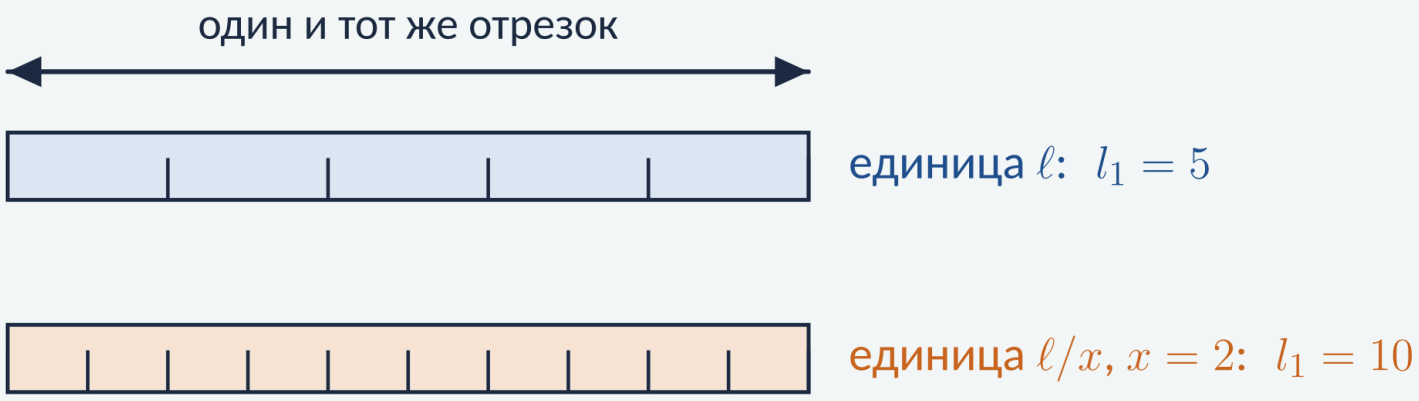
Числовое значение зависит от выбора масштабов — системы единиц измерения.

Примеры: длина, время, сила, энергия, скорость, напряжение.

Безразмерные величины

Числовое значение не зависит от системы единиц.

Примеры: углы, отношение двух длин, отношение энергии к моменту силы, числа Re, Fr, Ma.



Числовое значение длины зависит от выбора единицы, отношение двух длин — нет

Основные единицы. Формула размерности

В механике в качестве основных принимают единицы **длины (L)**, **массы (M)** и **времени (T)**. Единицы остальных — **производных** — величин выражаются через основные.

Если единица величины A имеет размерность p, q, r относительно единиц длины, массы и времени, то

$$[A] = L^p M^q T^r \tag{1}$$

Квадратные скобки обозначают **размерность** величины. Формулу (1) можно рассматривать как сжатое определение физической природы производной величины.

СИ

метр, килограмм, секунда (L, M, T)

СГС

сантиметр, грамм, секунда (L, M, T)

Техническая система МКГСС

метр, килограмм-сила, секунда (L, F, T)

Почему размерность — степенной одночлен

Два тела равной массы под действием сил F_1, F_2 проходят пути l_1, l_2:

$$F_1 = f(l_1), \qquad F_2 = f(l_2), \qquad \frac{F_1}{F_2} = \frac{f(l_1)}{f(l_2)}$$

Отношение не зависит от выбора единиц. Уменьшим единицу длины в x раз:

$$\frac{f(xl_1)}{f(xl_2)} = \frac{f(l_1)}{f(l_2)} \quad \Rightarrow \quad f(xl_1) = \frac{f(l_1)}{f(l_2)}\, f(xl_2)$$

Дифференцируем по x и полагаем x = 1. Так как l_1, l_2 произвольны:

$$\frac{l}{f(l)}\,\frac{df(l)}{dl} = a = \text{const}$$

Разделяя переменные и интегрируя, а затем повторяя рассуждение для массы и времени:

$$f(l) = k_1\, l^a, \qquad f(m) = k_2\, m^b, \qquad f(t) = k_3\, t^c$$

Общая зависимость:

$$F(l, m, t) = k\, l^a m^b t^c \tag{4}$$

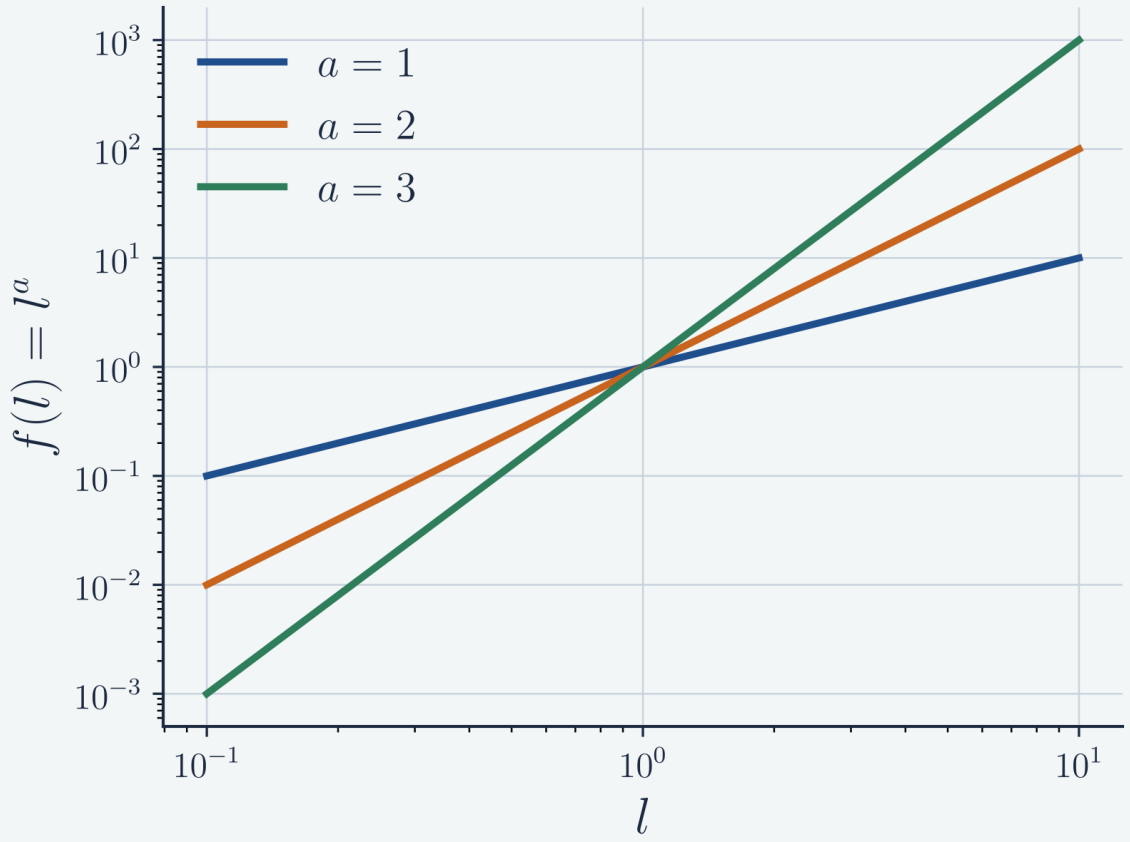
k — число, не зависящее от выбора единиц. Размерность любой величины — степенной одночлен.

Степенные функции и масштабная инвариантность

Только степенная функция f(l) = k l^a переходит сама в себя при изменении масштаба: f(xl) = x^a f(l).

В логарифмических координатах степенной закон — прямая с наклоном a. Это основа обработки опытных данных в виде критериальных зависимостей.

Именно поэтому формулы размерности и законы подобия имеют вид степенных одночленов.



Изменение единиц и пересчёт производных величин

Пусть числа, выражающие длину и время, увеличиваются соответственно в λ и τ раз. Тогда для скорости

$$l' = \lambda l, \quad t' = \tau t \quad \Rightarrow \quad v' = \frac{l'}{t'} = \frac{\lambda}{\tau} v$$

Мера скорости возрастает в λ/τ раз. Отсюда размерность скорости:

$$[v] = \frac{[l]}{[t]} = LT^{-1} \tag{5}$$

Пример

Переход от м/с к км/ч: $\lambda = 10^{-3}$, $\tau = 1/3600$, $\lambda/\tau = 3{,}6$ — 1 м/с = 3,6 км/ч.

Общее правило

При смене единиц L, M, T в λ, μ, τ раз мера величины $[A] = L^{p}M^{\psi}T^{r}$ меняется в $\lambda^{p}\mu^{\psi}\tau^{r}$ раз.

Размерности основных механических величин

Ускорение (по формуле равноускоренного движения):

$$[a] = \frac{[\Delta v]}{[\Delta t]} = LT^{-2} \tag{6}$$

Кинетическая энергия W = mv²/2 (множитель ½ безразмерен):

$$[W_k] = \left[\frac{1}{2}\right][m][v]^2 = L^2MT^{-2} \tag{7}$$

Сила — по второму закону Ньютона F = ma:

$$[F] = [m][a] = LMT^{-2} \tag{8}$$

		L	M	T
скорость	v	1	0	−1
ускорение	a	1	0	−2
сила	F	1	1	−2
энергия, работа	W	2	1	−2
давление	p	−1	1	−2
плотность	ρ	−3	1	0
динам. вязкость	μ	−1	1	−1
кинем. вязкость	ν	2	0	−1

Показатели степеней L, M, T для основных величин механики

Принцип размерной однородности

Все члены физически осмысленного уравнения имеют **одинаковую размерность**; аргументы функций exp, ln, sin и т.п. — безразмерны.

$$x = x_0 + v_0 t + \tfrac{1}{2} a t^2 : \qquad [x] = [v_0 t] = [a t^2] = L$$

Проверка формул

неоднородное по размерности выражение заведомо ошибочно

Поиск констант

размерность коэффициента определяется из уравнения

Переход к безразмерному виду

основа метода размерностей и теории подобия

Размерные постоянные:

$$[G] = \frac{[F][r^2]}{[m^2]} = L^3 M^{-1} T^{-2}, \qquad [\mu] = \frac{[\tau]}{[\partial v / \partial y]} = L^{-1} M T^{-1}$$

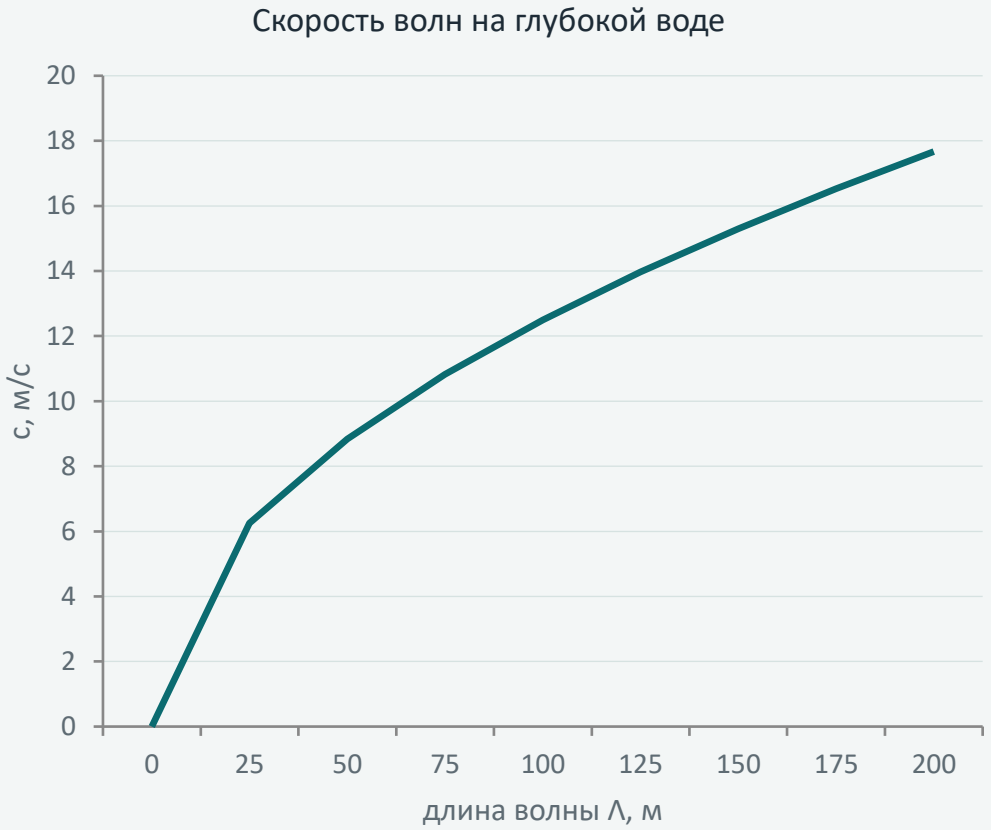
Пример: размерный анализ скорости волн на воде

Скорость с гравитационных волн на глубокой воде может зависеть от длины волны Λ, ускорения g и плотности ρ. Ищем $c = k\,\Lambda^a\, g^b\, \rho^s$:

L: $1 = a + b - 3s$
M: $0 = s$
T: $-1 = -2b$

Отсюда $b = ½$, $a = ½$, $s = 0$: **$c = k\sqrt{(g\Lambda)}$**. Точное решение даёт $k = 1/\sqrt{(2\pi)}$.

Плотность выпала из ответа: скорость волн не зависит от рода жидкости.



Системы единиц и число основных величин

Величина	СИ / СГС (L, M, T)	МКГСС (L, F, T)
Масса	M	$FL^{-1}T^{2}$
Сила	LMT^{-2}	F
Энергия	$L^{2}MT^{-2}$	FL
Давление	$L^{-1}MT^{-2}$	FL^{-2}
Плотность	$L^{-3}M$	$FL^{-4}T^{2}$
Динамическая вязкость	$L^{-1}MT^{-1}$	$FL^{-2}T$

Выбор основных единиц — вопрос соглашения; меняется вид формул размерности, но не физическое содержание.

Размерность как вектор показателей

Сопоставим величине A вектор показателей (p, q, r). Тогда:

- произведению величин соответствует **сумма** векторов;
- возведению в степень — **умножение** на число;
- безразмерной величине — **нулевой** вектор.

Величины с **независимыми размерностями** — линейно независимые векторы. В механике их не больше трёх.

Это алгебраическая основа П-теоремы (лекция 3).

Пример

[W] = [F]·[l]: (2, 1, −2) = (1, 1, −2) + (1, 0, 0)

Безразмерная комбинация

ρUd/μ: (−3,1,0) + (1,0,−1) + (1,0,0) − (−1,1,−1) = (0, 0, 0)

Заключение и вопросы для самоконтроля

Выводы

1. Размерные величины зависят от выбора единиц, безразмерные — нет.
2. В механике основные единицы — L, M, T; размерность $[A] = L^{p}M^{\psi}T^{r}$.
3. Из независимости отношений от единиц следует степенной вид формулы размерности.
4. $[v] = LT^{-1}$, $[a] = LT^{-2}$, $[F] = LMT^{-2}$, $[W] = L^{2}MT^{-2}$.
5. Физические уравнения однородны по размерности; размерности образуют векторное пространство показателей.

Контрольные вопросы

1. Какие величины называются размерными и безразмерными?
2. Что такое формула размерности? Запишите её в общем виде.
3. Докажите, что формула размерности — степенной одночлен.
4. Выведите размерности скорости, ускорения, силы и энергии.
5. Как меняется числовое значение величины при изменении основных единиц?
6. В чём состоит принцип размерной однородности?
7. Найдите размерности гравитационной постоянной и вязкости.
8. Как методом размерностей найти скорость волн на глубокой воде?