Казахский национальный университет имени аль-Фараби

Факультет механико-математический

Кафедра механики

Образовательная программа «7М05405 – Механика и энергетика» · магистратура

Дисциплина: Методы подобия и размерности в механике

Лекция № 8

Подобие конвективных течений вязкой несжимаемой жидкости. Критерии подобия

Преподаватель: Туралина Динара Елеусизовна

к.ф.-м.н., ассистент-профессор

Алматы, 2026 год

Модель стационарной конвекции

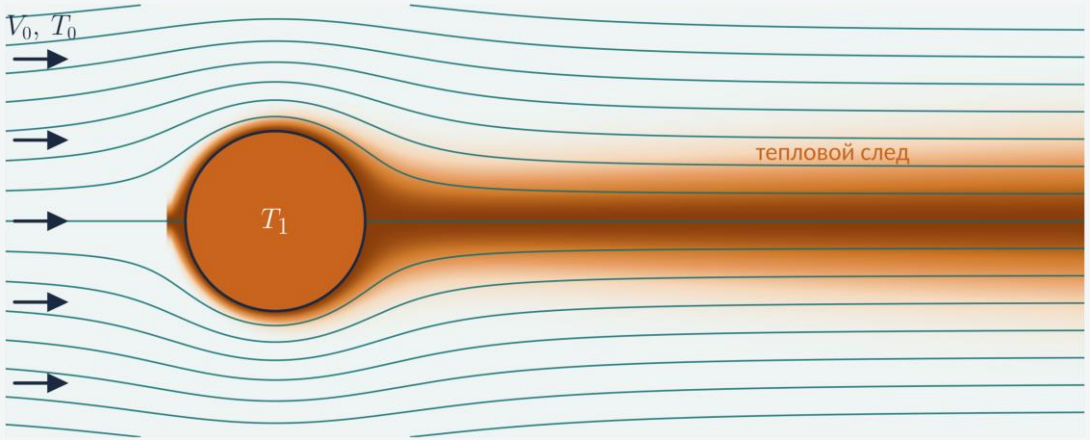
Система уравнений Навье — Стокса и притока тепла для стационарной конвекции вязкой несжимаемой жидкости:

$$\nabla \cdot \vec{v} = 0 \qquad (1)$$

$$(\vec{v} \cdot \nabla)\vec{v} = -\frac{1}{\rho}\nabla p + \nu \nabla^2 \vec{v} \qquad (2)$$

$$\vec{v} \cdot \nabla T = a_T \nabla^2 T, \qquad a_T = \frac{\lambda}{\rho c_p} \qquad (3)$$

a_T — температуропроводность; ν, λ, c_p — вязкость, теплопроводность, теплоёмкость. Вязкая диссипация не учитывается.



Нагретый цилиндр в потоке: линии тока и тепловой след

Неизвестные

v, p, T

Связь задач

поле скорости не зависит от T: сначала (1)–(2), затем (3)

Определяющие параметры конвекции

В систему (1)–(3) входят лишь две константы: ν и a_T. Через граничные условия решение зависит ещё от масштабов длины L, скорости V_0 и перепада температур $T_1 - T_0$ (T_1 — жидкость, T_0 — поверхность тела):

$$\nu,\ a_T,\ V_0,\ L,\ T_1 - T_0 \qquad (n = 5,\ k = 3\ \Rightarrow\ n - k = 2)$$

Независимые безразмерные комбинации — числа Рейнольдса и Прандтля:

$$\mathrm{Re} = \frac{V_0 L}{\nu}, \qquad \mathrm{Pr} = \frac{\nu}{a_T} \tag{4}$$

Число Прандтля — основной параметр теплообмена. $\Delta T = T_1 - T_0$ в уравнение (3) входит линейно и в критерии не попадает.

Число Прандтля — свойство среды

$Pr = \nu/a_T = \mu c_p/\lambda$ — отношение коэффициентов переноса импульса и тепла. Оно определяется **только свойствами среды**.

- $Pr \ll 1$ — тепло распространяется быстрее импульса (жидкие металлы);
- $Pr \approx 1$ — газы;
- $Pr \gg 1$ — вода, масла.

Модель и натура подобны по теплообмену, только если их среды имеют одинаковое Pr.

Среда	Pr
ртуть	≈ 0,025
жидкий натрий	≈ 0,006
воздух	≈ 0,71
водяной пар	≈ 1,0
вода, 80 °C	≈ 2,2
вода, 20 °C	≈ 7
трансформаторное масло	≈ 150

Безразмерные поля скорости и температуры

В стационарном конвективном потоке искомые распределения безразмерных скорости и температуры имеют вид:

$$\frac{v_i}{V_0} = f\left(\frac{x_i}{L}, \mathrm{Re}\right), \qquad \frac{T - T_0}{T_1 - T_0} = g\left(\frac{x_i}{L}, \mathrm{Re}, \mathrm{Pr}\right)$$

Два конвективных потока **подобны**, если одинаковы их числа Рейнольдса и Прандтля:

$$\mathrm{Re}_1 = \mathrm{Re}_2, \qquad \mathrm{Pr}_1 = \mathrm{Pr}_2 \tag{5}$$

Поле скорости

зависит только от Re

Поле температуры

зависит от Re и Pr

Плюс

геометрическое подобие и подобие граничных условий

Коэффициент теплоотдачи и число Нуссельта

Теплообмен между телом и жидкостью характеризует **коэффициент теплоотдачи**:

$$\alpha = \frac{q}{T_1 - T_0} \tag{6}$$

q — плотность теплового потока через поверхность. α — размерная величина, [α] = Вт/(м²·К). Безразмерная — **число Нуссельта**:

$$\mathrm{Nu} = \frac{\alpha L}{\lambda} \tag{7}$$

Nu — безразмерный градиент температуры на стенке:

$$q = -\lambda\left(\frac{\partial T}{\partial n}\right)_w \Rightarrow \mathrm{Nu} = -\left(\frac{\partial \theta}{\partial n^*}\right)_w$$

Свободная конвекция газа

α ≈ 2–25 Вт/(м²·К)

Вынужденная конвекция воды

α ≈ 500–10 000 Вт/(м²·К)

Кипение воды

α ≈ 2 500–100 000 Вт/(м²·К)

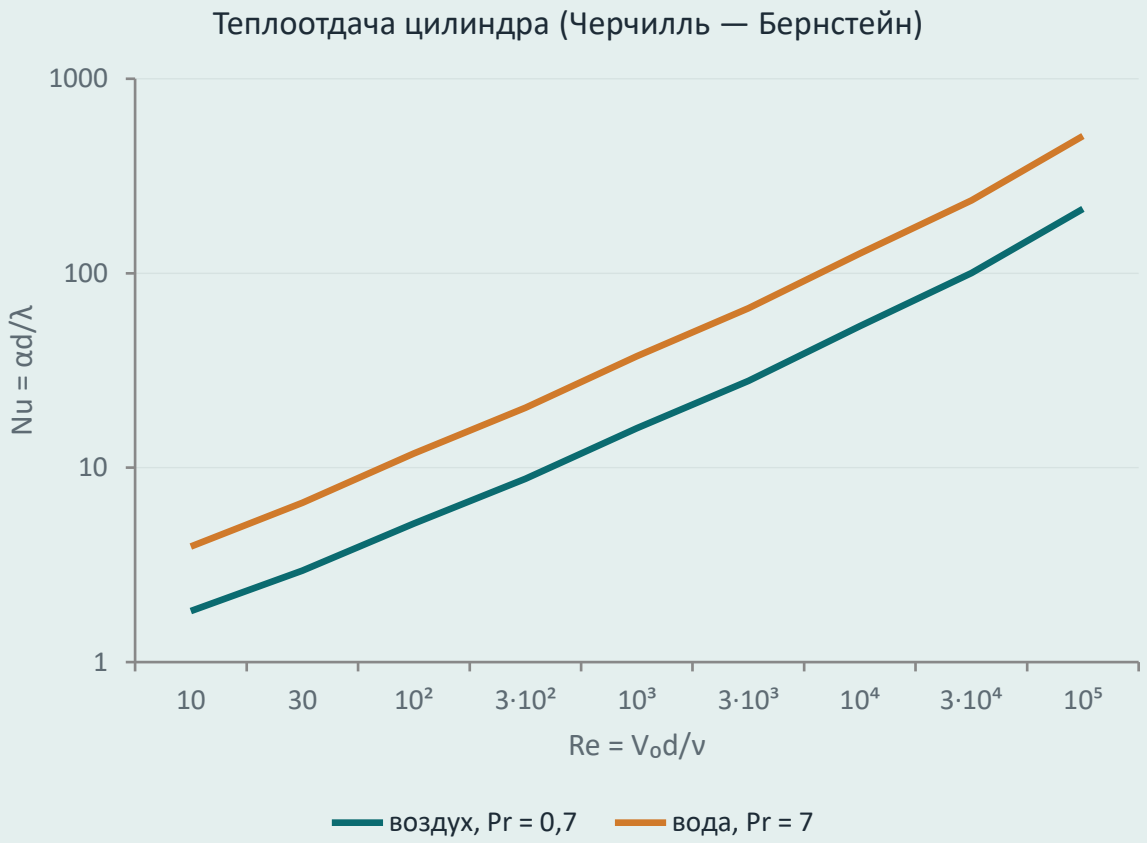
Критериальное уравнение теплообмена

При подобии конвективных процессов число Нуссельта — функция только Re и Pr:

$$\mathrm{Nu} = f(\mathrm{Re}, \mathrm{Pr}) \tag{8}$$

Nu — **определяемое** число: оно содержит неизвестную плотность теплового потока q.

Вид функции находят из опытов или численного решения; обычно Nu = C Re^m Pr^n.



Пример: поперечное обтекание цилиндра

Для поперечно обтекаемого цилиндра широко используется корреляция Черчилля — Бернстейна (Re·Pr ≳ 0,2):

$$\mathrm{Nu} = 0{,}3 + \frac{0{,}62\,\mathrm{Re}^{1/2}\mathrm{Pr}^{1/3}}{\left[1+(0{,}4/\mathrm{Pr})^{2/3}\right]^{1/4}}\left[1+\left(\frac{\mathrm{Re}}{282\,000}\right)^{5/8}\right]^{4/5}$$

Пример. Труба d = 25 мм в потоке воздуха V_0 = 5 м/с (ν = 1,5·10⁻⁵ м²/с, λ = 0,026 Вт/(м·К), Pr = 0,71): Re ≈ 8 300, Nu ≈ 48, α = Nu·λ/d ≈ 50 Вт/(м²·К).

Та же труба в воде при V_0 = 0,5 м/с (Re ≈ 12 500, Pr = 7): α ≈ 3 400 Вт/(м²·К) — почти в 70 раз больше.

Одна формула описывает теплоотдачу любых цилиндров в любых жидкостях — следствие теории подобия.

Свободная конвекция: число Грасгофа

Если движение вызвано не внешним потоком, а **силой плавучести** (нагретая стенка в неподвижной жидкости), масштаб скорости V_0 не задан. В уравнении движения появляется член $g\beta(T - T_0)$, β — коэффициент теплового расширения.

Вместо Re возникает **число Грасгофа**:

$$\mathbf{Gr = g\beta\,\Delta T\,L^3 / \nu^2}, \quad Nu = f(Gr, Pr)$$

Произведение $Ra = Gr \cdot Pr$ — число Рэлея. Ламинарный режим у вертикальной стенки: $Ra \lesssim 10^9$.

Вынужденная конвекция

Nu = f(Re, Pr): скорость задаётся насосом, вентилятором, внешним потоком

Свободная конвекция

Nu = f(Gr, Pr): движение порождается разностью плотностей

Смешанная

$Gr/Re^2 \sim 1$: важны оба механизма

Моделирование теплообмена

Для переноса результатов с модели на натуру необходимо:

- геометрическое подобие тел и каналов;
- равенство Re модели и натуры;
- равенство Pr (подбором среды или её температуры);
- подобие тепловых граничных условий (T_w = const или q_w = const).

Определяемый Nu пересчитывается на натуру без изменений: $\alpha_н = Nu \cdot \lambda_н / L_н$.

Метод аналогий

Массоперенос подобен теплопереносу: Sh = f(Re, Sc) по той же формуле, что Nu = f(Re, Pr).

Локальное моделирование

Если строгое подобие недостижимо, добиваются равенства лишь главных критериев.

Сводка критериев конвективного теплообмена

Критерий	Определение	Тип	Смысл
Рейнольдса Re	$V_o L/\nu$	определяющий	инерция / вязкость
Прандтля Pr	$\nu/a = \mu c_p/\lambda$	определяющий (свойство среды)	перенос импульса / перенос тепла
Пекле Pe	$V_o L/a = Re \cdot Pr$	производный	конвекция тепла / теплопроводность
Нуссельта Nu	$\alpha L/\lambda$	определяемый	интенсивность теплоотдачи
Стантона St	$Nu/(Re \cdot Pr)$	определяемый	теплоотдача / теплоёмкость потока

Заключение и вопросы для самоконтроля

Выводы

1. Стационарная конвекция описывается уравнениями (1)–(3) с двумя константами: ν и температуропроводностью a.
2. Пять параметров ν, a, V_0, L, ΔT дают два критерия: $Re = V_0 L/\nu$ и $Pr = \nu/a$.
3. Конвективные потоки подобны при $Re_1 = Re_2$, $Pr_1 = Pr_2$ (и подобных граничных условиях).
4. Теплоотдачу характеризует коэффициент $\alpha = q/(T_1 - T_0)$ и число Нуссельта $Nu = \alpha L/\lambda$.
5. Nu — определяемое число: $Nu = f(Re, Pr)$.

Контрольные вопросы

1. Запишите систему уравнений стационарной конвекции.
2. Какие параметры определяют конвективный процесс? Сколько из них можно составить безразмерных комбинаций?
3. Каков физический смысл числа Прандтля? Приведите его значения для разных сред.
4. При каких условиях два конвективных потока подобны?
5. Что такое коэффициент теплоотдачи и число Нуссельта?
6. Почему Nu — определяемое, а не определяющее число?
7. Как с помощью критериального уравнения рассчитать коэффициент теплоотдачи?