Казахский национальный университет имени аль-Фараби

Факультет механико-математический

Кафедра механики

Образовательная программа «7M05405 – Механика и энергетика» · магистратура

Дисциплина: Методы подобия и размерности в механике

Лекция № 2

Движение математического маятника. Метод размерности

Преподаватель: Туралина Динара Елеусизовна

к.ф.-м.н., ассистент-профессор

Алматы, 2026 год

Постановка задачи

Математический маятник — тяжёлая материальная точка на невесомой нерастяжимой нити, другой конец которой закреплён. Движение плоское, сопротивлением пренебрегаем.

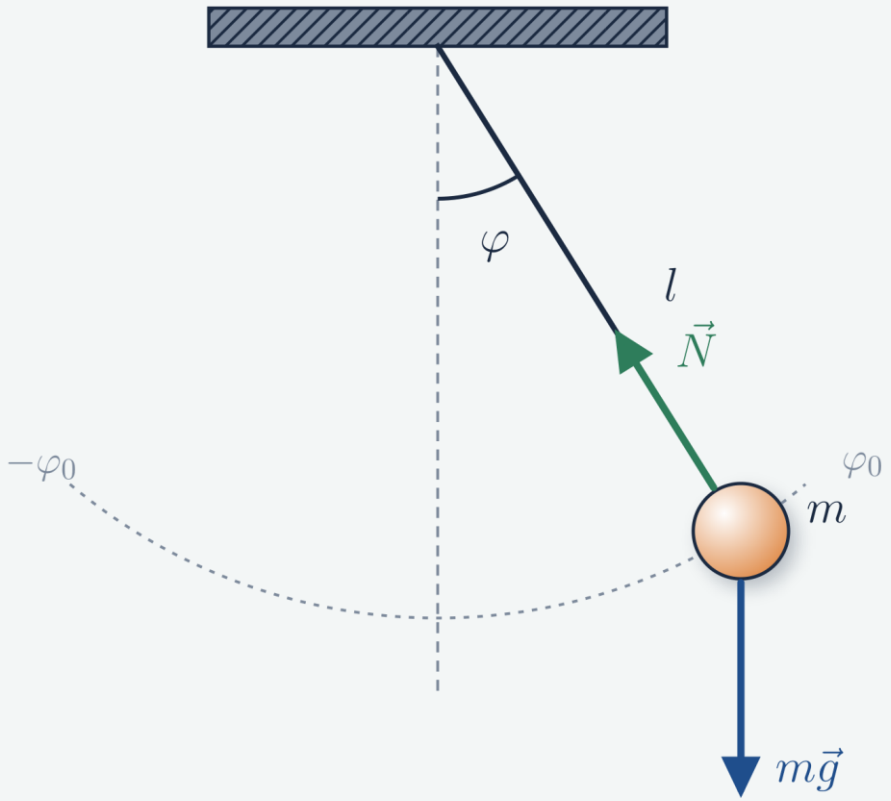
Обозначения: l — длина, ϕ — угол с вертикалью, t — время, m — масса груза, N — натяжение нити.

Уравнения движения:

$$\frac{d^2\varphi}{dt^2} = -\frac{g}{l}\sin\varphi \qquad (1)$$

$$m\left(\frac{d\varphi}{dt}\right)^2 l = N - mg\cos\varphi \qquad (2)$$

$$t = 0: \qquad \varphi = \varphi_0, \qquad \frac{d\varphi}{dt} = 0 \qquad (3)$$



Определяющие параметры

Из уравнений (1), (2) и начальных условий (3) следует, что движение полностью определяется параметрами

$$t,\ l,\ g,\ m,\ \varphi_0 \qquad \big([t]=T,\ [l]=L,\ [g]=LT^{-2},\ [m]=M,\ [\varphi_0]=1\big)$$

Искомые характеристики:

$$\varphi=\varphi(t,\varphi_0,l,g,m), \qquad N=mg\,f(t,\varphi_0,l,g,m) \tag{4}$$

n = 5

число определяющих параметров t, l, g, m, ϕ_0

k = 3

число независимых единиц измерения: L, M, T

n – k = 2

число независимых безразмерных комбинаций

Пять аргументов функций ф и f сводятся к двум безразмерным.

Безразмерные комбинации

Ищем комбинацию $П = t^a\, l^b\, g^c\, m^d$:

M: d = 0
L: b + c = 0
T: a − 2c = 0

При a = 1: c = ½, b = −½. Вместе с безразмерным ϕ_0 — две независимые комбинации:

$$\varphi_0 \quad \text{и} \quad t\sqrt{g/l} \tag{5}$$

Почему масса выпала

Размерность M имеет только m — составить из неё безразмерную комбинацию с другими параметрами нельзя.

Физический смысл τ = t√(g/l)

Время, измеренное в единицах √(l/g) — в системе единиц, где l = 1 и g = 1.

Результат метода размерности

Все другие безразмерные комбинации из t, l, g, m, ϕ_0 — функции комбинаций (5). Следовательно,

$$\varphi = \Phi\left(\varphi_0,\ t\sqrt{\frac{g}{l}}\right), \qquad N = mg\, f\left(\varphi_0,\ t\sqrt{\frac{g}{l}}\right) \tag{6}$$

Закон движения

не зависит от массы груза

Натяжение нити

прямо пропорционально массе груза: N ∝ mg

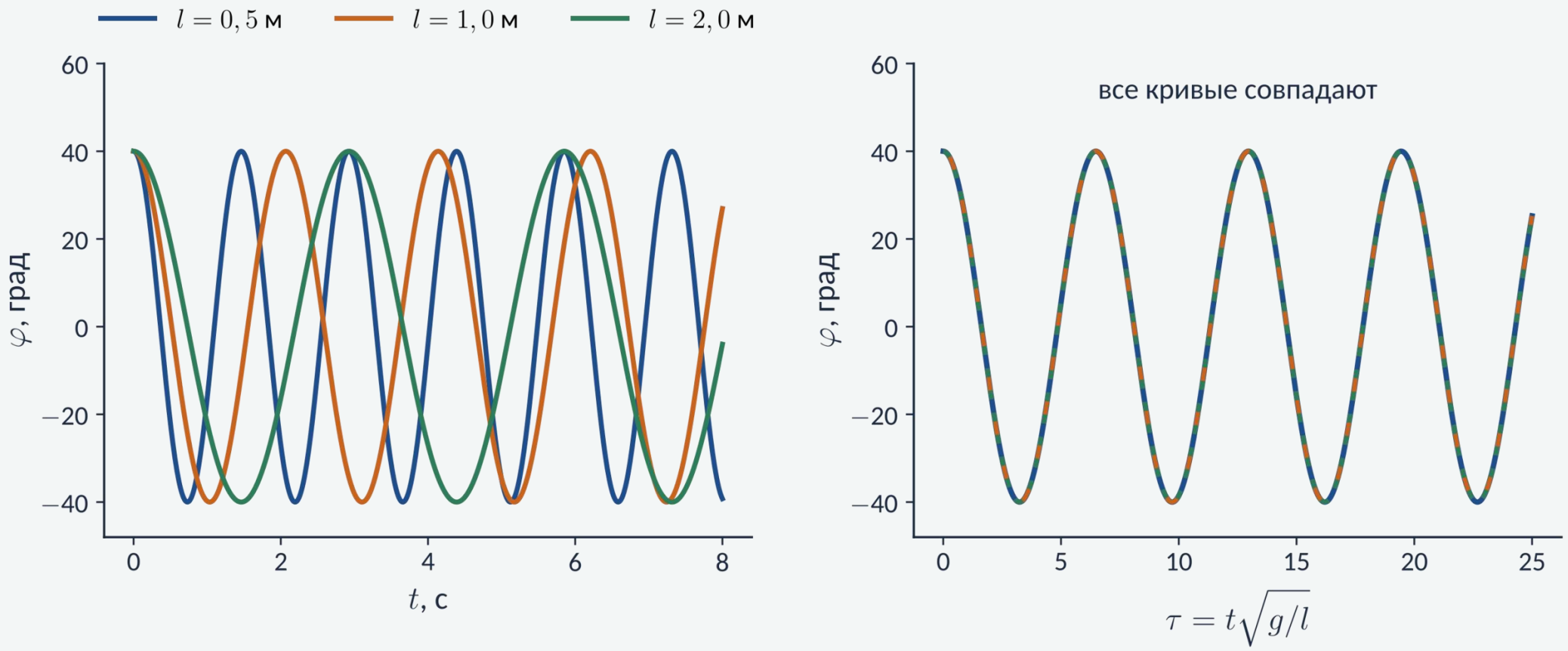
Масштаб времени

все процессы протекают в масштабе √(l/g)

Эти выводы непосредственно вытекают и из уравнений (1), (2), но метод размерности получает их **без решения уравнений**.

Подтверждение: решение уравнения маятника

Численное решение уравнения (1) при $\phi_0 = 40°$ для трёх длин нити: в размерном времени кривые различны, в безразмерном $\tau = t\sqrt{g/l}$ — **совпадают**.



Безразмерная форма уравнений

В переменной τ = t√(g/l) уравнение (1) не содержит размерных параметров:

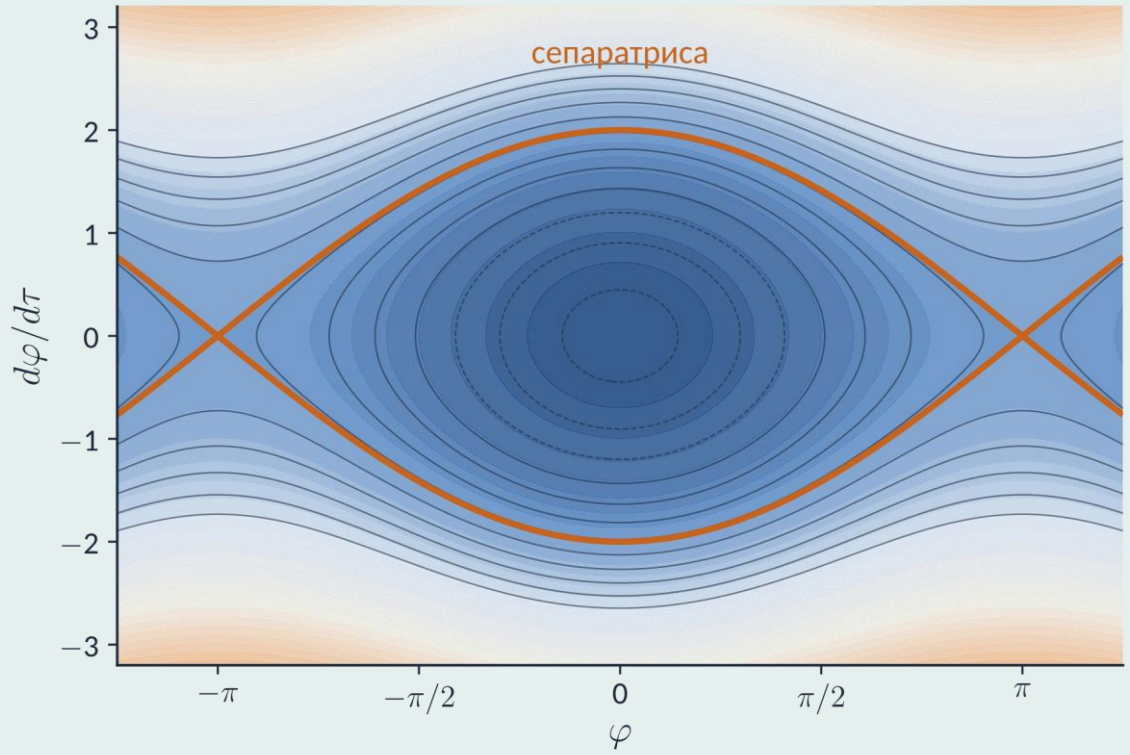
$$\tau = t\sqrt{g/l}: \qquad \frac{d^2\varphi}{d\tau^2} = -\sin\varphi$$

Первый интеграл (закон сохранения энергии):

$$\frac{1}{2}\left(\frac{d\varphi}{d\tau}\right)^2 - \cos\varphi = -\cos\varphi_0$$

Тогда из (2) натяжение нити:

$$\frac{N}{mg} = 3\cos\varphi - 2\cos\varphi_0$$



Фазовый портрет: замкнутые траектории — колебания, сепаратриса отделяет вращения

Период колебаний

Период T_0 — функция тех же параметров, не зависящая от t. Из (6):

$$T_0 = \sqrt{\frac{l}{g}}\,\theta(\varphi_0)$$

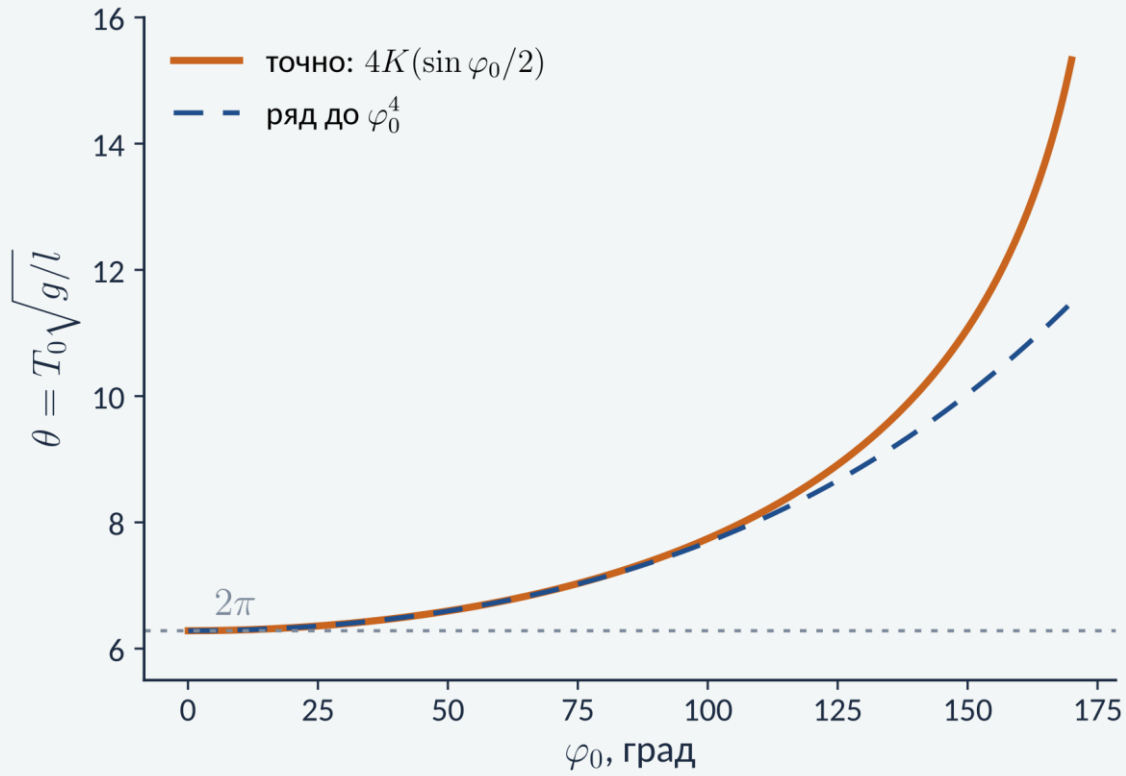
Точное решение — полный эллиптический интеграл первого рода:

$$\theta(\varphi_0) = 4K\left(\sin\frac{\varphi_0}{2}\right) = 2\pi\left(1 + \frac{\varphi_0^2}{16} + \frac{11\varphi_0^4}{3072} + \dots\right)$$

При малых амплитудах (изохронность):

$$\varphi_0 \to 0: \qquad T_0 = 2\pi\sqrt{l/g}$$

При $\phi_0 = 30°$ поправка к периоду около 1,7 %, при 90° — около 18 %.



Безразмерный период θ(ϕ₀): точное значение и разложение в ряд

Маятник с сопротивлением: роль массы

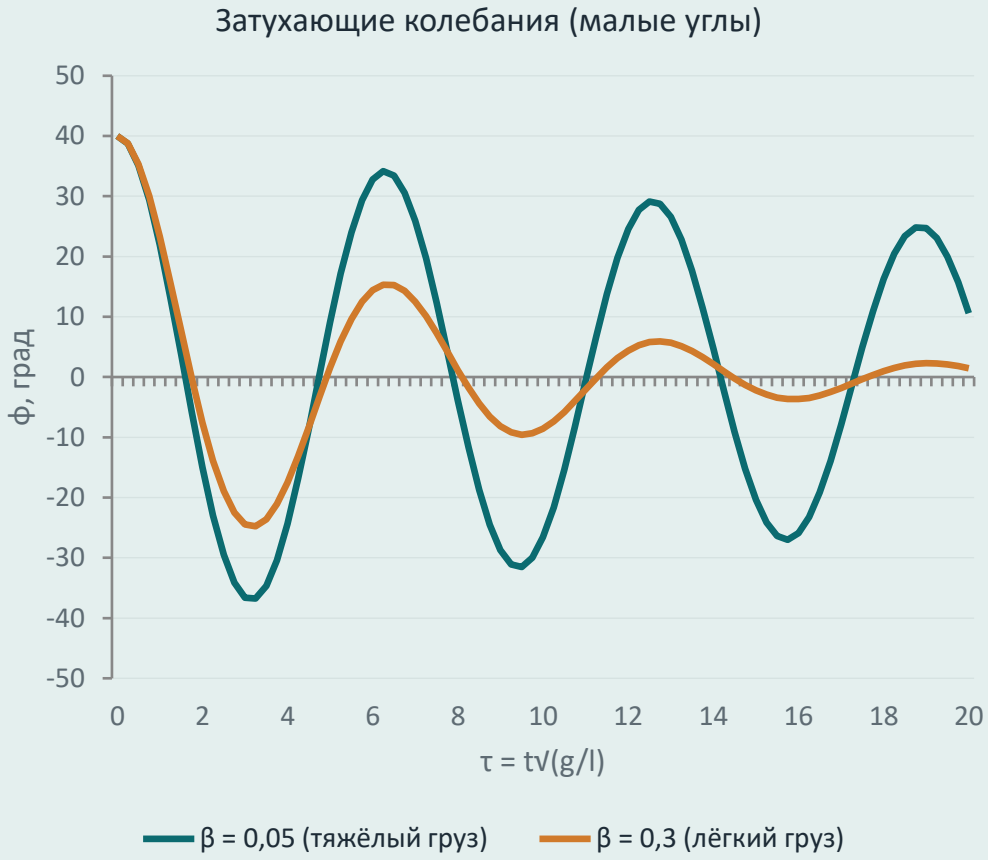
Добавим силу вязкого сопротивления $F = -b\,v$, где b — коэффициент сопротивления, $[b] = MT^{-1}$. Теперь определяющие параметры:

t, l, g, m, ϕ_0, b: $n = 6, k = 3 \Rightarrow n - k = 3$

Третья безразмерная комбинация:

$$\beta = (b/m)\cdot\sqrt{(l/g)},\quad \phi = \Phi(\phi_0, t\sqrt{(g/l)}, \beta)$$

Теперь закон движения зависит от массы: тяжёлый груз затухает медленнее лёгкого.



Алгоритм метода размерности

1. Выделить систему определяющих параметров $a_1, \ldots, a_n$ — по уравнениям и условиям задачи или из физических соображений
2. Записать их размерности и найти число k величин с независимыми размерностями
3. Составить n − k независимых безразмерных комбинаций
4. Записать искомую безразмерную величину как функцию этих комбинаций
5. Найти вид функции теоретически, численно или из эксперимента

Возможности и ограничения метода

Что даёт метод

сокращает число аргументов искомых функций;
выявляет масштабы величин;
позволяет обобщать опытные данные;
даёт законы подобия для моделирования

Чего метод не даёт

вида функций Φ и f;
числовых коэффициентов (например, 2π в формуле периода);
гарантии полноты системы параметров

Если пропустить существенный параметр (например, сопротивление воздуха), результат будет неверен; лишний параметр лишь усложнит ответ.

Ограничения метода размерности привели к формулировке П-теоремы (лекция 3).

Заключение и вопросы для самоконтроля

Выводы

1. Движение математического маятника определяется параметрами t, l, g, m, ϕ_0 ($n = 5$, $k = 3$).
2. Независимые безразмерные комбинации: ϕ_0 и $t\sqrt{(g/l)}$.
3. $\phi = \Phi(\phi_0, t\sqrt{(g/l)})$, $N = mg\, f(\phi_0, t\sqrt{(g/l)})$: закон движения не зависит от массы, $N \propto m$.
4. Период $T_0 = \sqrt{(l/g)}\ \theta(\phi_0)$; при малых амплитудах $T_0 = 2\pi\sqrt{(l/g)}$.
5. Метод размерности даёт аргументы искомых функций, но не их вид.

Контрольные вопросы

1. Запишите уравнения движения математического маятника и начальные условия.
2. Какие параметры определяют движение маятника? Почему их пять?
3. Сколько безразмерных комбинаций можно составить? Найдите их.
4. Почему масса не входит в закон движения?
5. Каков смысл величины $t\sqrt{(g/l)}$?
6. Как метод размерности определяет структуру формулы периода?
7. Чем ограничен метод размерности?