Казахский национальный университет имени аль-Фараби

Факультет механико-математический

Кафедра механики

Образовательная программа «7M05405 – Механика и энергетика» · магистратура

Дисциплина: Методы подобия и размерности в механике

Лекция № 9

Теплопередача в пограничном слое. Критерии подобия

Преподаватель: Туралина Динара Елеусизовна

к.ф.-м.н., ассистент-профессор

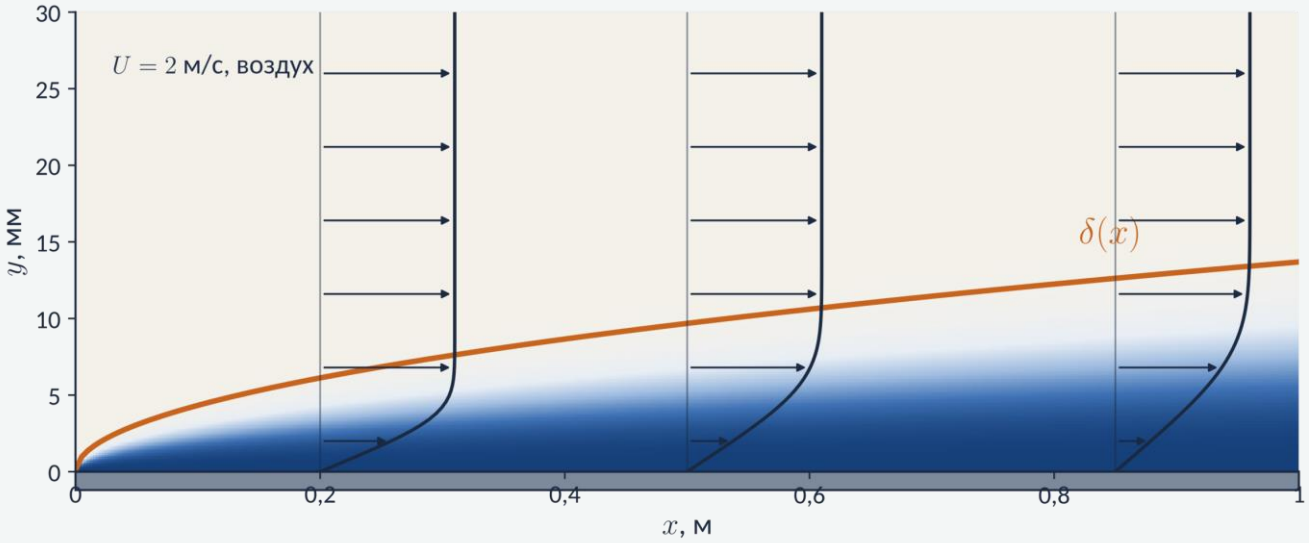
Алматы, 2026 год

Пограничный слой при больших числах Рейнольдса

При ламинарном обтекании тела с Re ≫ 1 область возмущённого течения разделяется на:

- тонкий пристенный **пограничный слой** вязкой жидкости;
- внешний поток, где вязкость не играет роли и течение можно считать потенциальным.

Пограничный слой характеризуется большими градиентами скорости и температуры.



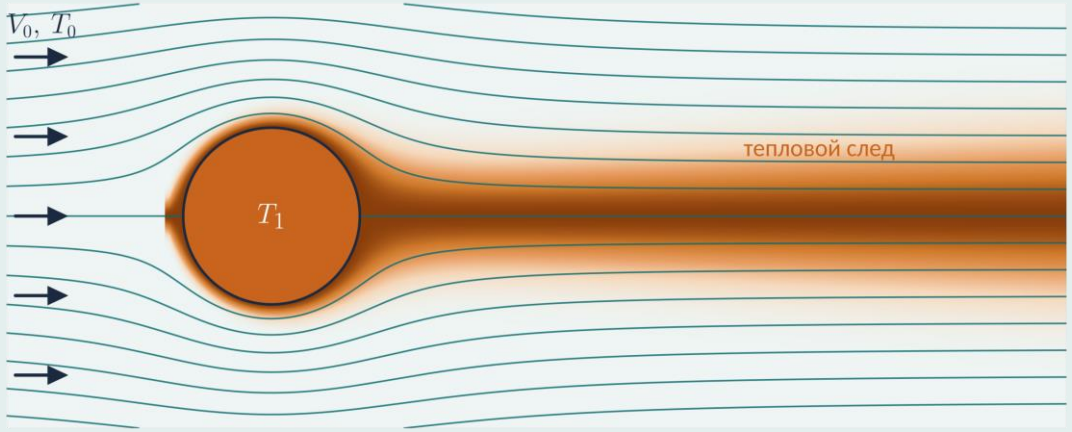
Динамический пограничный слой на пластине (решение Блазиуса, воздух, U = 2 м/с)

Тепловой пограничный слой

Внешняя область приближённо идеальна: в ней отсутствуют и внутреннее трение, и теплопроводность. Поэтому при обтекании нагретого тела жидкость нагревается **только в пристенном слое**.

Вместе с динамическим образуется **температурный** пограничный слой:

- δ_d — толщина динамического слоя (скорость);
- δ_T — толщина температурного слоя (температура).



Нагретое тело: прогрев жидкости — в тонком слое и в следе

Оценка толщины динамического слоя

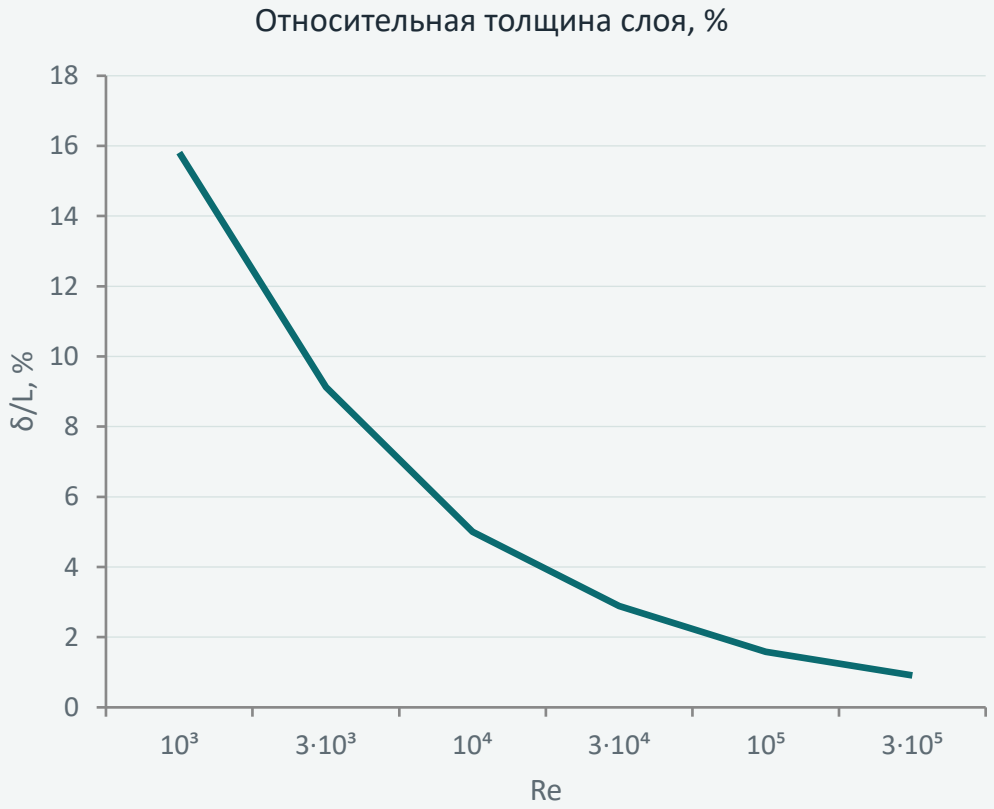
В пограничном слое силы инерции и вязкости одного порядка:

$$\frac{U^2}{L} \sim \nu \frac{U}{\delta_d^2} \Rightarrow \delta_d \sim \sqrt{\frac{\nu L}{U}} = \frac{L}{\sqrt{\mathrm{Re}}}$$

Отсюда толщина динамического пограничного слоя:

$$\delta_d \sim \frac{L}{\sqrt{\mathrm{Re}}} \qquad (1)$$

Точное решение Блазиуса для пластины: $\delta_d \approx 5x/\sqrt{\mathrm{Re}_x}$ (по уровню 0,99U).



Оценка толщины температурного слоя

Аналогично, конвективный перенос тепла уравновешивается теплопроводностью:

$$U\frac{\Delta T}{L} \sim a_T\frac{\Delta T}{\delta_T^2} \;\Rightarrow\; \delta_T \sim \sqrt{\frac{a_T L}{U}} = \frac{L}{\sqrt{\mathrm{Pe}}}$$

Толщина температурного пограничного слоя:

$$\delta_T \sim \frac{L}{\sqrt{\mathrm{Re}\,\mathrm{Pr}}} \qquad (2)$$

Pe = Re·Pr — число Пекле.

Динамический слой

определяется диффузией импульса — коэффициент ν

Температурный слой

определяется диффузией тепла — коэффициент a_T

Отношение толщин и смысл числа Прандтля

Связав (1) и (2):

$$\frac{\delta_T}{\delta_d} \sim \frac{1}{\sqrt{\mathrm{Pr}}} \qquad (3)$$

Оценка (2) строго справедлива при $\mathrm{Pr} \ll 1$ (температурный слой толще динамического). При $\mathrm{Pr} \gtrsim 1$ точное решение даёт

$$\mathrm{Pr} \gtrsim 1: \qquad \frac{\delta_T}{\delta_d} \approx \mathrm{Pr}^{-1/3}$$

Газы, Pr ≈ 1

δ_T и δ_d одного порядка

Жидкости, Pr ≫ 1

температурный слой тоньше динамического

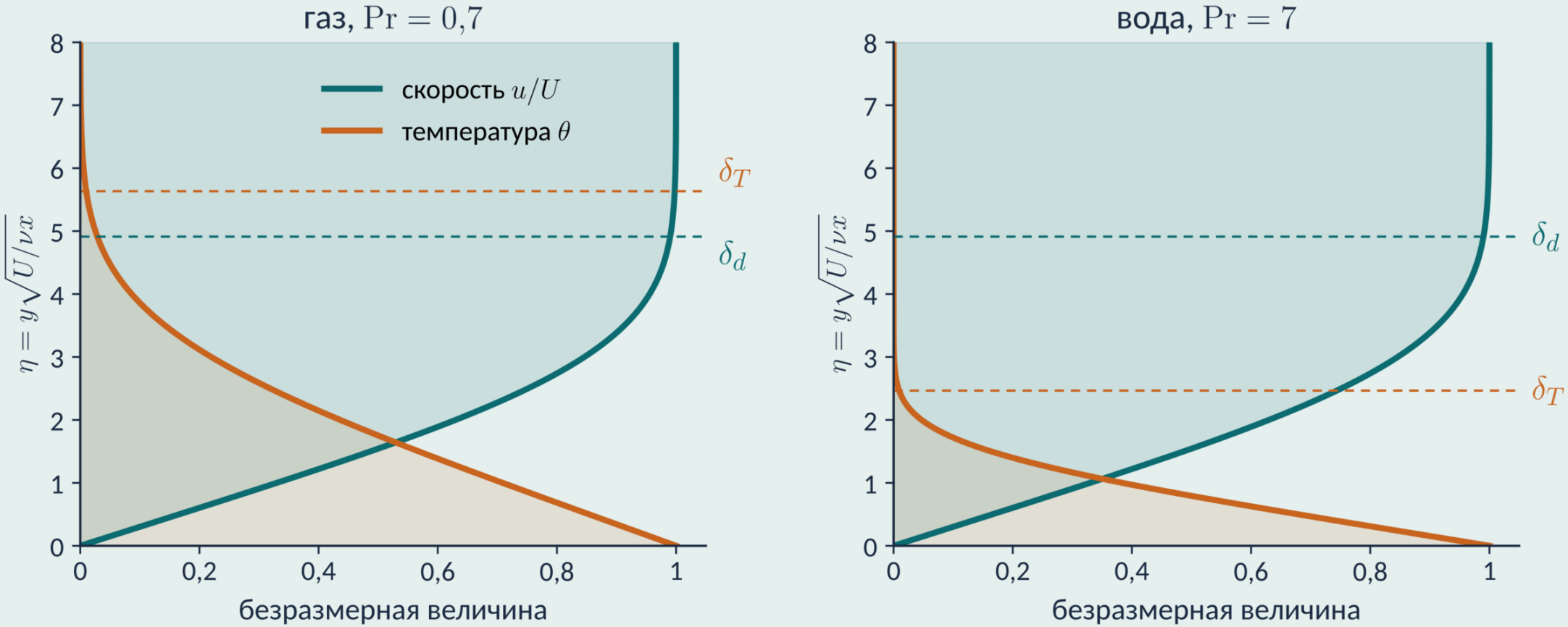
Жидкие металлы, Pr ≪ 1

температурный слой много толще динамического

Число Прандтля — важнейший параметр температурного пограничного слоя и теплопередачи.

Профили скорости и температуры

Численное решение уравнений пограничного слоя на пластине (Блазиус — Польгаузен): при Pr = 7 температурный слой заметно тоньше динамического.

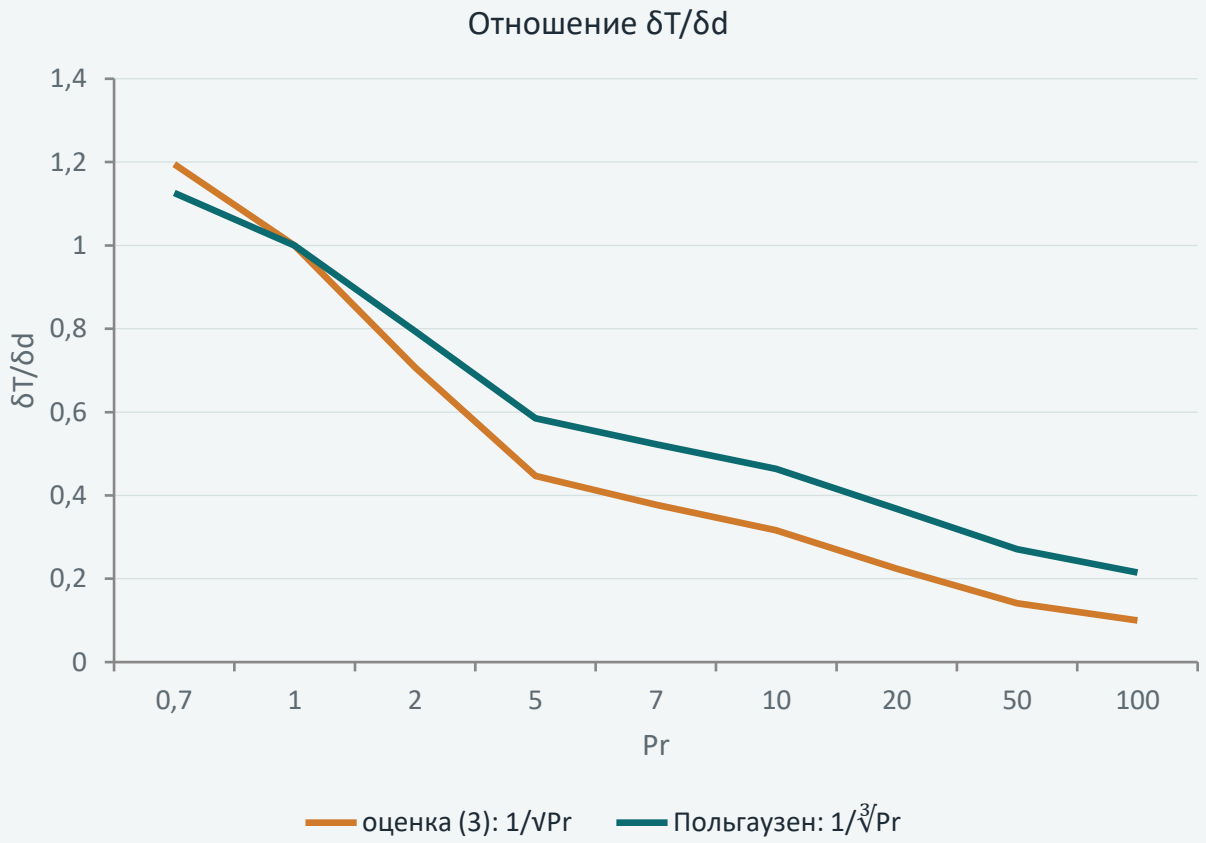


Зависимость δT/δd от числа Прандтля

Сравнение двух оценок отношения толщин:

- **$1/\sqrt{Pr}$** — оценка (3) из конспекта;
- **$1/\sqrt[3]{Pr}$** — решение Польгаузена ($Pr \gtrsim 0{,}6$).

Обе оценки дают $\delta_T < \delta_d$ при $Pr > 1$; качественный вывод лекции сохраняется.



Тепловой поток и число Нуссельта

Если распределение температуры в пограничном слое известно, тепловой поток на стенке:

$$q = -\lambda \frac{\partial T}{\partial n} \approx \lambda \frac{T_1 - T_0}{\delta_T}$$

Так как $\delta_T \propto 1/\sqrt{\mathrm{Re}}$, поток q, а с ним и число Нуссельта, пропорциональны $\sqrt{\mathrm{Re}}$. Зависимость от Pr остаётся неопределённой:

$$\mathrm{Nu} = \sqrt{\mathrm{Re}}\, f(\mathrm{Pr}) \qquad (4)$$

Решение Польгаузена

$$\mathrm{Nu}_x = 0{,}332\, \mathrm{Re}_x^{1/2}\, \mathrm{Pr}^{1/3}$$

Вывод

Метод порядков даёт структуру $\mathrm{Nu} \propto \sqrt{\mathrm{Re}}$; функцию f(Pr) находят из решения или опыта.

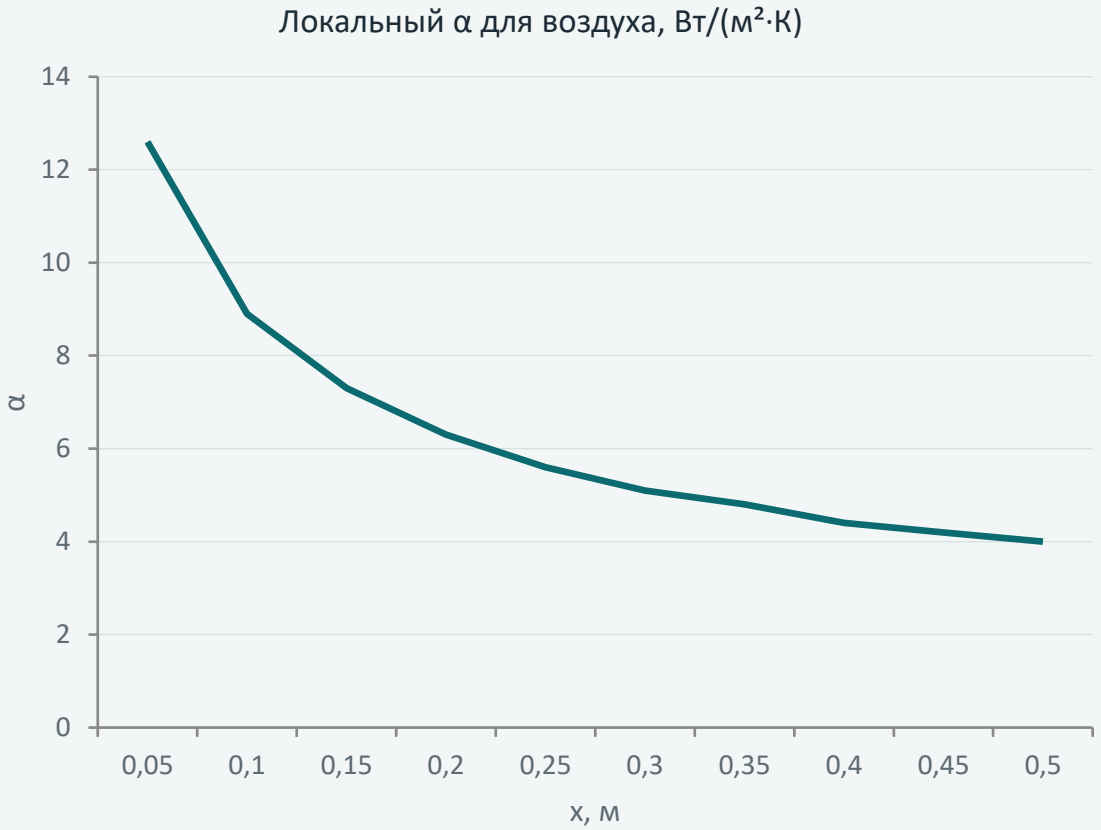
Пример: теплоотдача пластины

Пластина длиной 0,5 м обтекается со скоростью U = 2 м/с. По формуле Польгаузена $\alpha_x = Nu_x \cdot \lambda / x$:

Воздух ($\nu = 1{,}5 \cdot 10^{-5}$ м²/с, $\lambda = 0{,}026$ Вт/(м·К), Pr = 0,71): при x = 0,25 м $Re_x \approx 3{,}3 \cdot 10^4$, $Nu_x \approx 54$, $\alpha \approx 5{,}6$ Вт/(м²·К).

Вода ($\nu = 1{,}0 \cdot 10^{-6}$ м²/с, $\lambda = 0{,}6$ Вт/(м·К), Pr = 7): $Re_x = 5 \cdot 10^5$ (на границе ламинарного режима), $Nu_x \approx 450$, $\alpha \approx 1\,080$ Вт/(м²·К).

α убывает вдоль пластины как $x^{-1/2}$: слой утолщается.



Критерии подобия теплопередачи в пограничном слое

Величина	Оценка / формула	Определяется
Толщина динамического слоя	$\delta d \sim L/\sqrt{Re}$	числом Рейнольдса
Толщина температурного слоя	$\delta T \sim L/\sqrt{(Re \cdot Pr)}$	числами Re и Pr (числом Пекле)
Отношение толщин	$\delta T/\delta d \sim 1/\sqrt{Pr}$ ($Pr \ll 1$); $\approx 1/\sqrt[3]{Pr}$ ($Pr \gtrsim 1$)	только числом Прандтля
Тепловой поток	$q \approx \lambda(T_1 - T_o)/\delta T$	толщиной температурного слоя
Число Нуссельта	$Nu = \sqrt{Re} \cdot f(Pr)$	Re и Pr

Заключение и вопросы для самоконтроля

Выводы

1. При $Re \gg 1$ вязкость и теплопроводность существенны только в тонком пристенном слое.
2. Толщины слоёв: $\delta d \sim L/\sqrt{Re}$, $\delta T \sim L/\sqrt{(Re \cdot Pr)}$.
3. Отношение $\delta T/\delta d$ определяется числом Прандтля; в газах слои одного порядка, в жидкостях температурный тоньше.
4. Тепловой поток $q \approx \lambda \Delta T/\delta T$, поэтому $Nu = \sqrt{Re} \cdot f(Pr)$.
5. Для ламинарной пластины $Nu_x = 0{,}332 \cdot \sqrt{Re_x} \cdot \sqrt[3]{Pr}$.

Контрольные вопросы

1. Что такое пограничный слой? Почему его толщина мала при больших Re?
2. Чем температурный пограничный слой отличается от динамического?
3. Оцените толщину динамического пограничного слоя методом порядков.
4. Оцените толщину температурного слоя. Какое число подобия в неё входит?
5. Каков смысл формулы $\delta T/\delta d \sim 1/\sqrt{Pr}$? Где она применима?
6. Почему число Нуссельта пропорционально $\sqrt{Re}$?
7. Как меняется коэффициент теплоотдачи вдоль пластины?