Казахский национальный университет имени аль-Фараби

Факультет механико-математический

Кафедра механики

Образовательная программа «6B05403 – Механика»

Дисциплина: Введение в механику сплошной среды

Лекция № 1

Основы тензорного исчисления и анализа

Преподаватель: Туралина Динара Елеусизовна

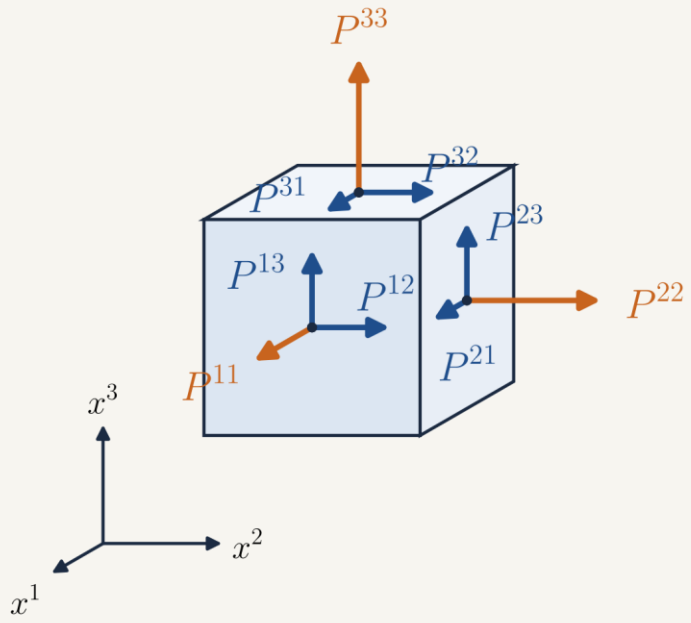
к.ф.-м.н., ассистент-профессор

Алматы, 2026 год

Тензорная природа величин механики сплошной среды

Многие характеристики движения сплошной среды имеют **тензорную природу**: сам объект не зависит от выбора системы координат, а при её смене по определённому закону меняются лишь его компоненты.

Ранг	Обозначение	Примеры в МСС
0 — скаляр	без индексов	плотность ρ, давление p, температура T
1 — вектор	один индекс: a^i, a_j	скорость v, ускорение a
2 — тензор	два индекса: P^{ij}, ε_{ij}	напряжения P^{ij}, деформации ε_{ij}, скорости деформаций e_{ij}



Тензор напряжений: на каждой грани — нормальная и две касательные компоненты

Система координат и основной базис

Система координат устанавливает соответствие между числами и точками пространства. Через каждую точку проходят три координатные линии: инерциальной системы наблюдателя x^1, x^2, x^3 и сопутствующей системы ξ^1, ξ^2, ξ^3.

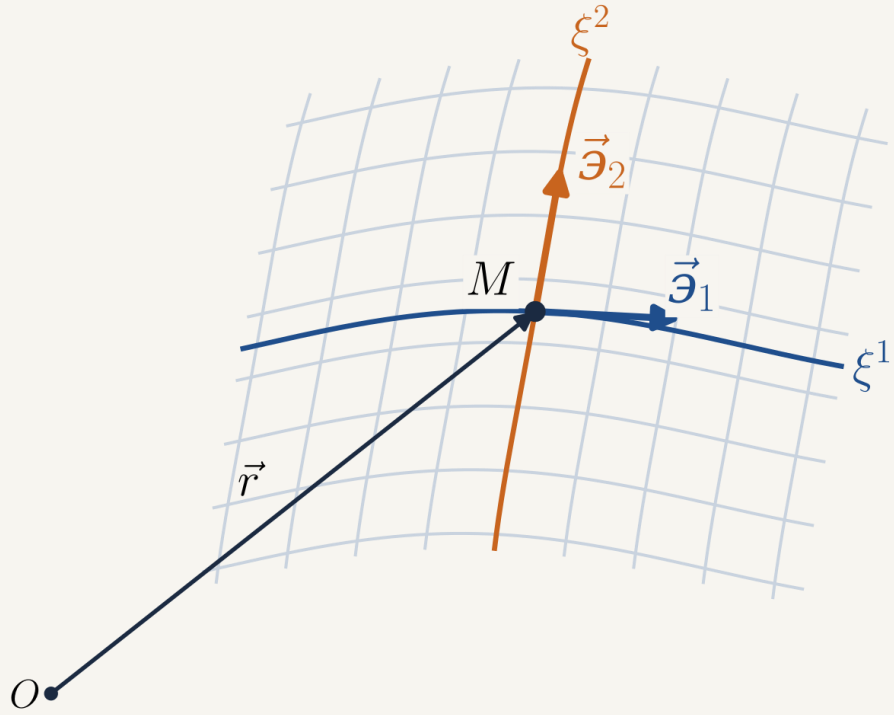
Тройка линейно независимых векторов

$$\vec{\mathfrak{e}}_i = \frac{\partial \vec{r}}{\partial x^i}, \qquad \vec{r} = \vec{r}\,(x^1, x^2, x^3) \tag{1.1}$$

называется **основным базисом**; векторы $\mathbf{\mathfrak{e}}_i$ касательны к координатным линиям, **r** — радиус-вектор точки M.

Для декартовой системы координат:

$$\vec{\mathfrak{e}}_1 = \vec{i}, \quad \vec{\mathfrak{e}}_2 = \vec{j}, \quad \vec{\mathfrak{e}}_3 = \vec{k}$$



Векторы основного базиса касательны к координатным линиям ξ^1 и ξ^2

Сопряжённый (взаимный) базис

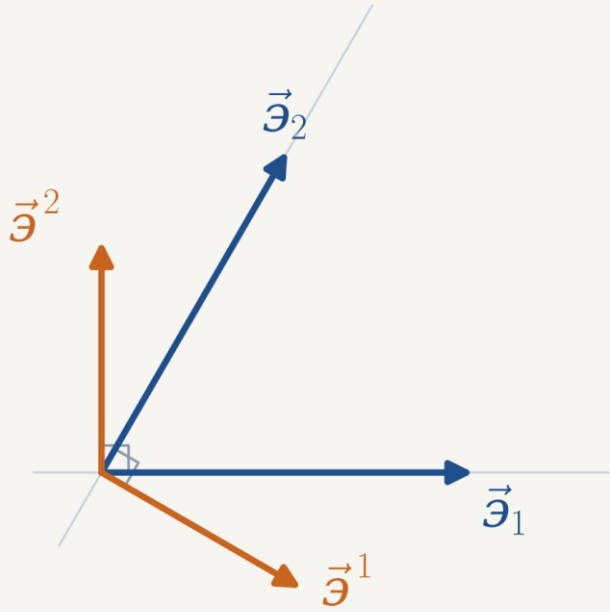
Базисом, сопряжённым по отношению к $\vec{э}_i$, называется тройка векторов $\vec{э}^j$, удовлетворяющих условию

$$\vec{э}_i \cdot \vec{э}^{\,j} = \delta_i^j = \begin{cases} 1, & i = j \\ 0, & i \neq j \end{cases}$$

где δ_i^j — **символ Кронекера**. Каждый вектор $\vec{э}^j$ ортогонален двум основным векторам с другими номерами и просто выражается через основной базис:

$$\vec{э}^{\,1} = \frac{\vec{э}_2 \times \vec{э}_3}{\vec{э}_1 \cdot (\vec{э}_2 \times \vec{э}_3)}, \quad \vec{э}^{\,2} = \frac{\vec{э}_3 \times \vec{э}_1}{\vec{э}_1 \cdot (\vec{э}_2 \times \vec{э}_3)}, \quad \vec{э}^{\,3} = \frac{\vec{э}_1 \times \vec{э}_2}{\vec{э}_1 \cdot (\vec{э}_2 \times \vec{э}_3)} \tag{1.2}$$

В декартовой системе основной и сопряжённый базисы совпадают.



$э^1 \perp э_2, э^2 \perp э_1$

Контравариантные и ковариантные компоненты

Вектор **a** раскладывается по основному или по сопряжённому базису:

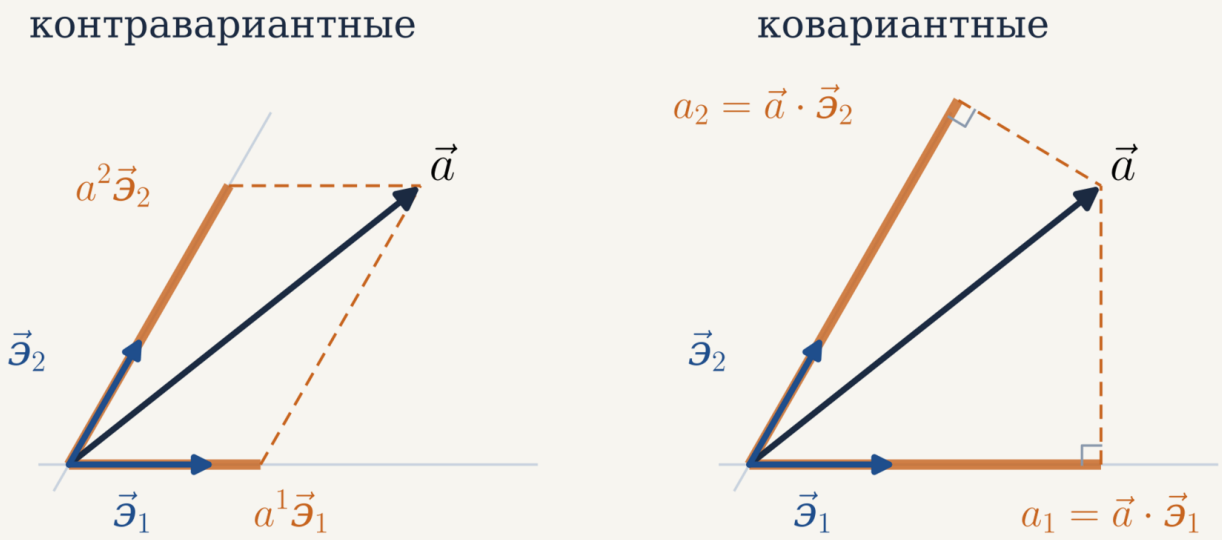
$$\vec{a} = a^i\,\vec{\mathcal{E}}_i = a_j\,\vec{\mathcal{E}}^{\,j} \tag{1.3}$$

$$a^i = \vec{a}\cdot\vec{\mathcal{E}}^{\,i}, \qquad a_j = \vec{a}\cdot\vec{\mathcal{E}}_j$$

$$\vec{a} = \left(\vec{a}\cdot\vec{\mathcal{E}}^{\,i}\right)\vec{\mathcal{E}}_i = \left(\vec{a}\cdot\vec{\mathcal{E}}_j\right)\vec{\mathcal{E}}^{\,j} \tag{1.4}$$

a^i — контравариантные, **a_j** — ковариантные компоненты.

Правило Эйнштейна: по повторяющемуся верхнему и нижнему индексу подразумевается суммирование от 1 до 3.



В косоугольном базисе: контравариантные компоненты — параллельные проекции, ковариантные — ортогональные

Метрический тензор

Применяя (1.4) к базисным векторам, получаем связь базисов:

$$\vec{\mathfrak{e}}_i = g_{ij}\,\vec{\mathfrak{e}}^{\,j}, \qquad \vec{\mathfrak{e}}^{\,i} = g^{ij}\,\vec{\mathfrak{e}}_j$$

$$g_{ij} = \vec{\mathfrak{e}}_i \cdot \vec{\mathfrak{e}}_j, \qquad g^{ij} = \vec{\mathfrak{e}}^{\,i} \cdot \vec{\mathfrak{e}}^{\,j}$$

– компоненты **метрического тензора**; он симметричен:

$$g_{ij} = g_{ji}, \quad g^{ij} = g^{ji}, \quad g_{ij}\,g^{jk} = \delta_i^{\,k}$$

Метрика определяет расстояния и углы:

$$ds^2 = g_{ij}\,dx^i\,dx^j$$



$$\cos\widehat{(\vec{a},\vec{b})} = \frac{g_{ij}\,a^i b^j}{\sqrt{g_{mn}a^m a^n}\,\sqrt{g_{es}b^e b^s}}$$

Примеры: декартова, цилиндрическая и сферическая системы

$$ds^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2$$

$$ds^2 = dr^2 + r^2 d\varphi^2 + dz^2$$

$$ds^2 = dr^2 + r^2 d\theta^2 + r^2 \sin^2\theta\, d\varphi^2$$

Тензорное произведение и ранг тензора

Каждой паре векторов **a**, **b** (заданных, например, контравариантными компонентами a^i, b^j) единственным образом соответствует элемент 9-мерного пространства — **тензорное произведение**:

$$C^{ij} = a^i b^j = \begin{pmatrix} a^1 b^1 & a^1 b^2 & a^1 b^3 \\ a^2 b^1 & a^2 b^2 & a^2 b^3 \\ a^3 b^1 & a^3 b^2 & a^3 b^3 \end{pmatrix} \qquad (1.5)$$

По числу и расположению **свободных индексов** судят о тензорном характере величины.

Все операции над тензорами **инвариантны** — не зависят от преобразований системы координат, и их результат снова является тензором.

1 — **Ранг 0 — скаляр**
одна компонента: ρ, p, T

3 — **Ранг 1 — вектор**
три компоненты: v^i, a^i

9 — **Ранг 2 — тензор**
девять компонент: P^{ij}, ε_{ij}, e_{ij}

В трёхмерном пространстве тензор ранга n имеет 3^n компонент.

Алгебраические операции над тензорами

а) Перестановка индексов

$$b_{ij} = a_{ji}$$

б) Сложение и вычитание (одной валентности)

$$c_{ij} = a_{ij} \pm b_{ij}$$

в) Умножение на число

$$a_{ij} = \lambda\, b_{ij}$$

г) Симметрирование и альтернирование

$$a_{(ij)} = a_{ij} + a_{ji}, \quad a_{[ij]} = a_{ij} - a_{ji}$$

$$a_{ij} = \tfrac{1}{2}\, a_{(ij)} + \tfrac{1}{2}\, a_{[ij]}$$

д) Поднятие и опускание индексов (с помощью g)

$$a^{ij} g_{ik} = a_k^{\,j}, \quad a^{ij} g_{ik} g_{jm} = a_{km}$$

е) Свёртывание тензоров

$$C_{kjk\ell} = C_{1j1\ell} + C_{2j2\ell} + C_{3j3\ell} = b_{j\ell}, \quad C_{k\ell k\ell} = \lambda$$

Свёртка по паре индексов понижает ранг на 2: тензор 4-го ранга → тензор 2-го ранга → скаляр.

Дифференцирование вектора. Символы Кристоффеля

Пусть **a** = a^m**э**$_m$ — функция ξ^1, ξ^2, ξ^3. В криволинейных координатах меняются и компоненты, и сами базисные векторы:

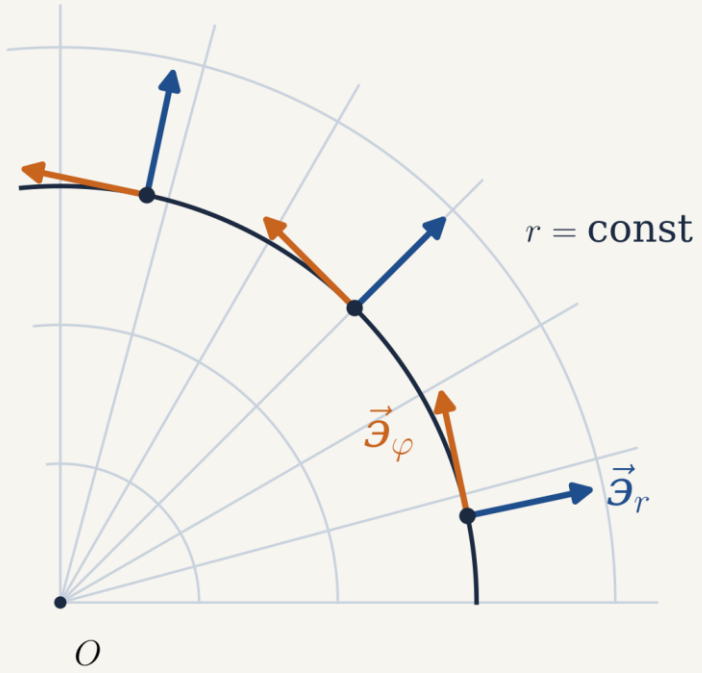
$$\frac{\partial \vec{a}}{\partial \xi^k} = \frac{\partial a^m}{\partial \xi^k}\,\vec{э}_m + a^m\,\frac{\partial \vec{э}_m}{\partial \xi^k} \tag{1.6}$$

Разложим производные базисных векторов по базису **э**$_j$:

$$\frac{\partial \vec{э}_m}{\partial \xi^k} = \Gamma^{\,j}_{mk}\,\vec{э}_j, \qquad \Gamma^{\,j}_{mk} = \frac{\partial \vec{э}_m}{\partial \xi^k}\cdot \vec{э}^{\,j}$$

Γ^{j}_{mk} — **символы Кристоффеля второго рода**. Получаем ковариантную производную:

$$\frac{\partial \vec{a}}{\partial \xi^k} = \left(\frac{\partial a^i}{\partial \xi^k} + a^m\,\Gamma^{\,i}_{mk}\right)\vec{э}_i = \nabla_k a^i\,\vec{э}_i \tag{1.7}$$



Полярные координаты: **э**$_r$ и **э**ф поворачиваются от точки к точке, поэтому Γ ≠ 0

Оператор Гамильтона и градиент

Символический вектор — **оператор Гамильтона** («набла»):

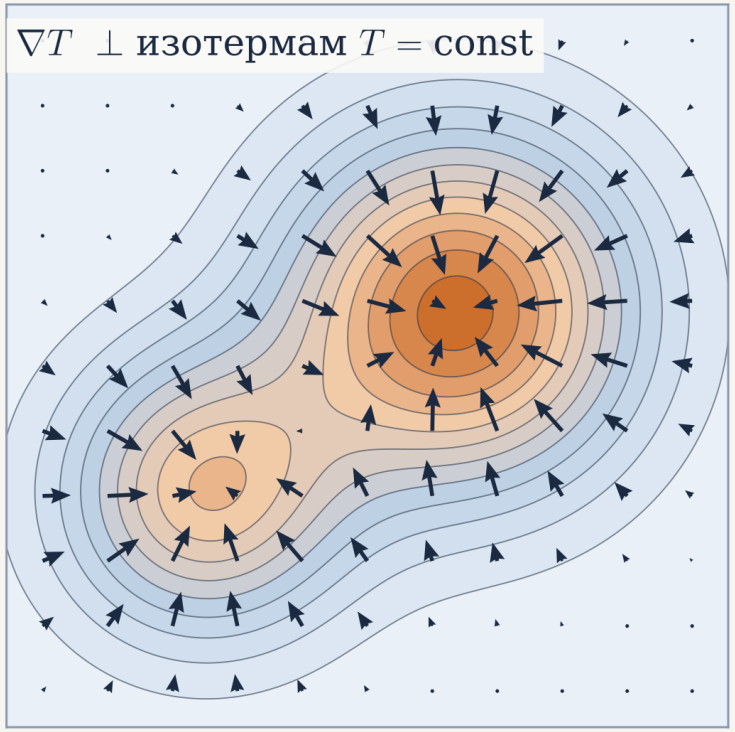
$$\nabla = \vec{e}^{\,k} \frac{\partial(\,\cdot\,)}{\partial \xi^k} = \operatorname{grad}(\,\cdot\,)$$

Градиент тензора нулевого ранга (температуры) — вектор:

$$\operatorname{grad} T = \nabla T = \vec{e}^{\,k} \frac{\partial T}{\partial \xi^k}$$

$$\nabla T = \frac{\partial T}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial T}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial T}{\partial z}\vec{k}$$

Градиент тензора — тензор валентности на единицу большей, чем валентность исходного тензора.



Векторы ∇T перпендикулярны изотермам и направлены в сторону роста T

Дивергенция, ротор и оператор Лапласа

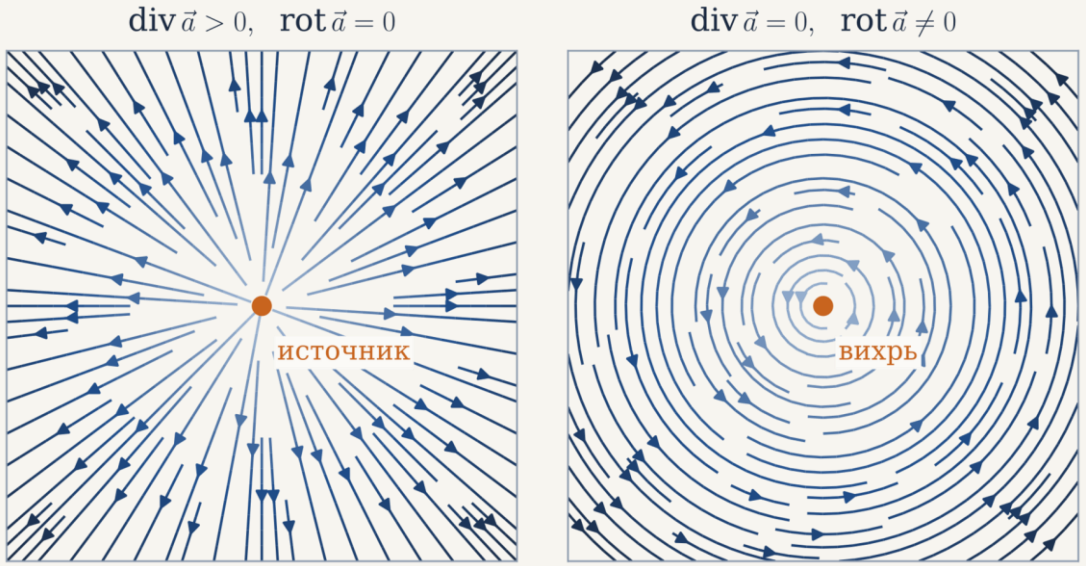
Дивергенция — скалярное произведение ∇ на тензор; для вектора это скаляр:

$$\nabla \cdot \vec{a} = \nabla_i a^i = \frac{\partial a^i}{\partial \xi^i} + a^m \Gamma^i_{im}$$

$$\operatorname{div} \vec{a} = \frac{\partial a_1}{\partial x^1} + \frac{\partial a_2}{\partial x^2} + \frac{\partial a_3}{\partial x^3}$$

Ротор — векторное произведение ∇ на тензор (псевдовектор):

$$\operatorname{rot} \vec{a} = \nabla \times \vec{a} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \dfrac{\partial}{\partial x^1} & \dfrac{\partial}{\partial x^2} & \dfrac{\partial}{\partial x^3} \\ a^1 & a^2 & a^3 \end{vmatrix}$$



Оператор Лапласа:

$$\Delta = \nabla^2 = \nabla \cdot \nabla, \qquad \nabla^2 T = \frac{\partial^2 T}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial x_3^2}$$

Заключение и вопросы для самоконтроля

Выводы

1. Характеристики движения сплошной среды — тензоры: скаляры (ρ, p, T), векторы ($\mathbf{v}$, $\mathbf{a}$), тензоры второго ранга (P^{ij}, ε_{ij}, e_{ij}).
2. В криволинейных координатах используют основной $\mathbf{э}_i$ и сопряжённый $\mathbf{э}^j$ базисы; вектор имеет контравариантные и ковариантные компоненты.
3. Метрический тензор g_{ij} задаёт длины и углы, поднимает и опускает индексы.
4. Операции над тензорами инвариантны; производная вектора в криволинейных координатах содержит символы Кристоффеля.
5. Оператор ∇ порождает градиент, дивергенцию, ротор и лапласиан.

Контрольные вопросы

1. Какие величины МСС являются тензорами нулевого, первого и второго ранга? Приведите примеры.
2. Как определяются основной и сопряжённый базисы? Что выражает условие $\mathbf{э}_i \cdot \mathbf{э}^j = \delta_i^{\,j}$?
3. Чем контравариантные компоненты вектора отличаются от ковариантных?
4. Что такое метрический тензор? Перечислите его свойства.
5. Какие алгебраические операции над тензорами вы знаете? Что даёт свёртка?
6. Почему при дифференцировании вектора в криволинейных координатах появляются символы Кристоффеля?
7. Как меняется ранг тензора при вычислении градиента и дивергенции?