Казахский национальный университет имени аль-Фараби

Факультет механико-математический

Кафедра механики

Образовательная программа «6B05403 – Механика»

Дисциплина: Введение в механику сплошной среды

Лекция № 9

Объёмные и поверхностные силы. Тензор напряжений

Преподаватель: Туралина Динара Елеусизовна

к.ф.-м.н., ассистент-профессор

Алматы, 2026 год

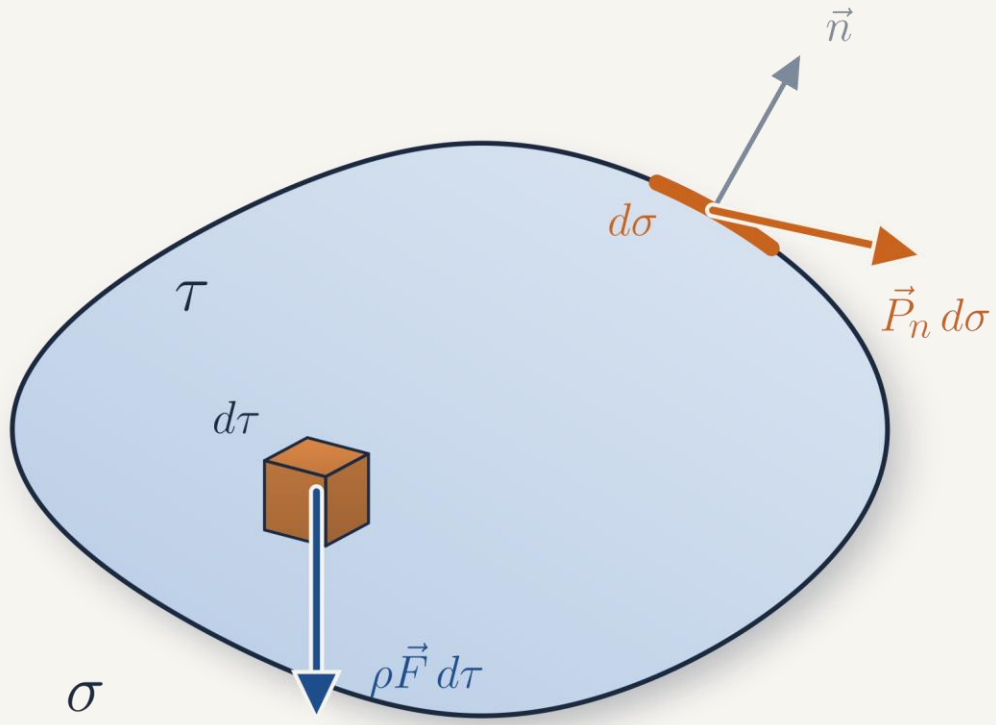
Силы, действующие на сплошную среду

Массовые (объёмные) силы

Распределены по объёму τ или по всей массе тела. Действуют на каждую частицу: сила тяжести, силы инерции, электромагнитные силы.

Поверхностные силы

Распределены по поверхности σ. Передаются через контакт: давление, силы вязкого трения, реакции опор. **В МСС играют основную роль.**



Массовая сила ρF dτ действует на элемент объёма, поверхностная P_ndσ — на элемент поверхности

Массовые силы

Пусть Δ**f** — главный вектор массовых сил, действующих на элемент массы Δm. **Вектор плотности распределения массовой силы**:

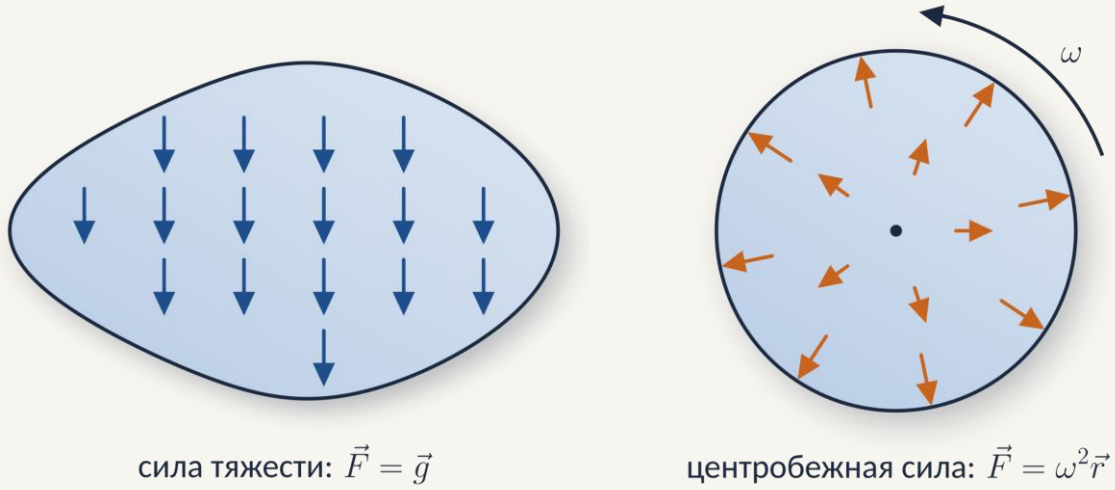
$$\vec{F} = \lim_{\Delta\tau \to 0} \frac{\Delta \vec{f}}{\Delta m}$$

Предполагается, что он зависит от точки и времени:

$$\vec{F} = \vec{F}(M, t)$$

Действие массовых сил на объём τ выражается через главный вектор и главный момент:

$$\vec{R}_m = \int_\tau \rho \vec{F}\, d\tau, \qquad \vec{M}_m = \int_\tau \vec{r} \times \rho \vec{F}\, d\tau$$



сила тяжести: $\vec{F} = \vec{g}$ центробежная сила: $\vec{F} = \omega^2 \vec{r}$

Примеры полей массовых сил: однородное поле тяжести и центробежная сила инерции во вращающемся теле

Поверхностные силы. Вектор напряжений

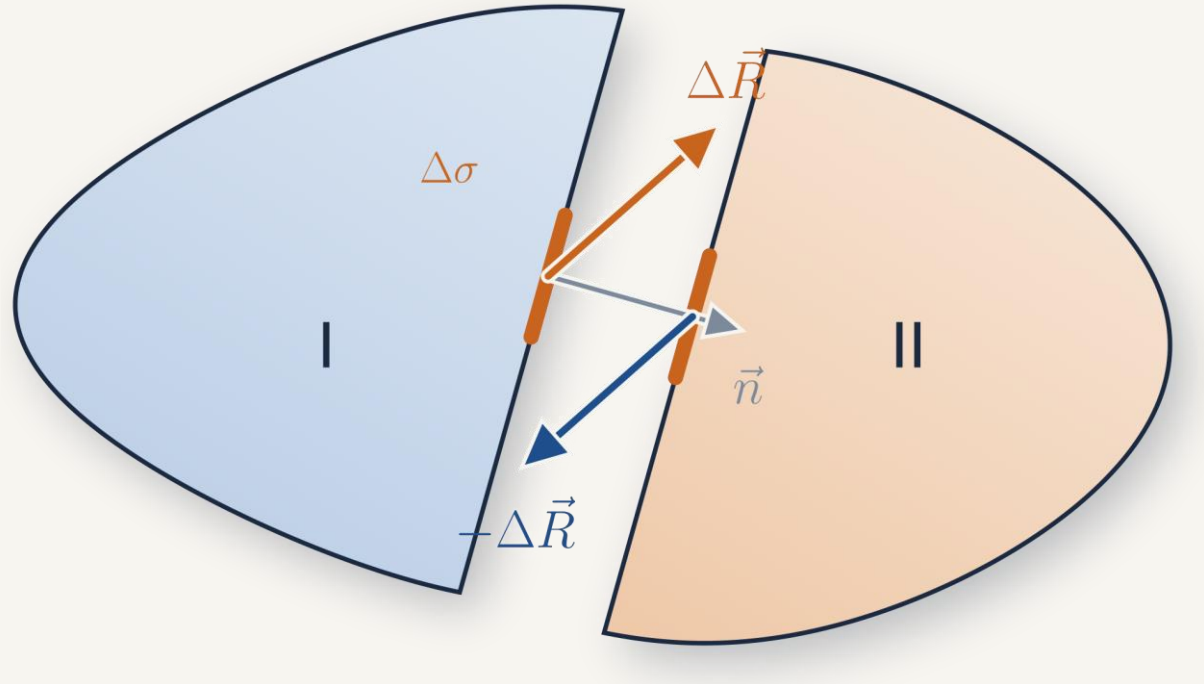
Пусть **ΔR** — главный вектор поверхностных сил, действующих на элементарную площадку Δσ. Тогда

$$\vec{P} = \lim_{\Delta\sigma \to 0} \frac{\Delta \vec{R}}{\Delta \sigma}$$

определяет **вектор плотности поверхностных сил — вектор напряжений** на площадке Δσ.

Примеры: силы вязкого взаимодействия двух соприкасающихся объёмов $\Delta\tau_1$ и $\Delta\tau_2$, силы давления, архимедова сила.

По третьему закону Ньютона части I и II действуют друг на друга с силами **ΔR** и **−ΔR**.



Тело, мысленно рассечённое на части I и II: на площадке Δσ действуют равные и противоположные силы

Зависимость вектора напряжений от площадки

Вектор напряжений зависит от времени, от точки *M* и от **направления нормали n** к площадке, но не от вида самой поверхности:

$$\vec{P} = \vec{P}(M, t, \vec{n})$$

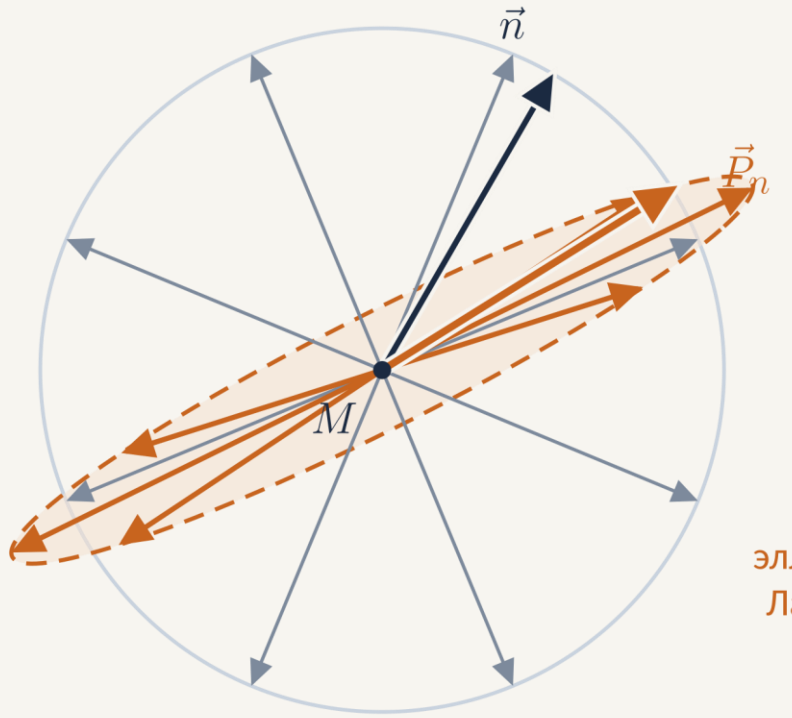
Действие поверхностных сил на всё тело — главный вектор и главный момент:

$$\vec{R}_n = \int_\sigma \vec{P}\, d\sigma, \qquad \vec{M}_n = \int_\sigma \vec{r} \times \vec{P}\, d\sigma$$

Для противоположно ориентированных площадок:

$$\vec{P}_{-n} = -\vec{P}_n$$

Задача: найти закон, по которому P_n зависит от n.



эллипс Ламе

Через точку M — разные площадки: каждой нормали n соответствует свой вектор P_n

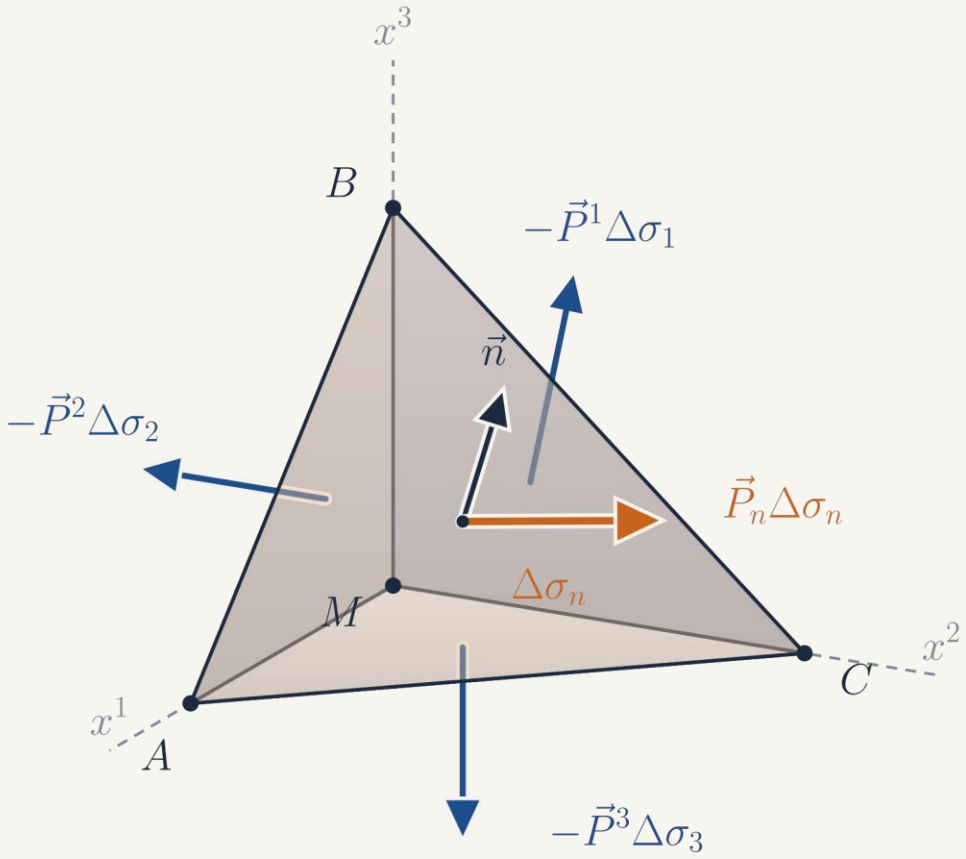
Элементарный тетраэдр в окрестности точки

Вырежем в среде бесконечно малый тетраэдр *MABC* с вершиной в точке *M*.

- **$\Delta\sigma_n$** — площадь наклонной грани *ABC* с внешней нормалью **n**;
- **$\Delta\sigma_1$, $\Delta\sigma_2$, $\Delta\sigma_3$** — площади граней, перпендикулярных осям x^1, x^2, x^3;
- **P^1, P^2, P^3** — векторы напряжений на этих гранях.

Площади граней — проекции наклонной грани:

$$\Delta\sigma_i = n_i \, \Delta\sigma_n$$



Уравнение движения тетраэдра

Рассматривая тетраэдр как абсолютно твёрдое тело массы Δm, запишем уравнение движения его центра инерции:

$$\Delta m \frac{d\vec{v}_c}{dt} = \vec{F}\Delta m + \vec{P}_n \Delta\sigma_n - \vec{P}^1\Delta\sigma_1 - \vec{P}^2\Delta\sigma_2 - \vec{P}^3\Delta\sigma_3 \qquad (9.1)$$

Здесь $\mathbf{v}_c$ — скорость центра инерции. При линейном размере тетраэдра *h*:

$$\Delta m \sim \rho\, h^3, \qquad \Delta\sigma_n,\ \Delta\sigma_i \sim h^2$$

Делим (9.1) на $\Delta\sigma_n$ и устремляем $h \to 0$: члены с Δm исчезают, остаётся

$$\vec{P}_n \Delta\sigma_n = \vec{P}^1\Delta\sigma_1 + \vec{P}^2\Delta\sigma_2 + \vec{P}^3\Delta\sigma_3$$



Формула Коши

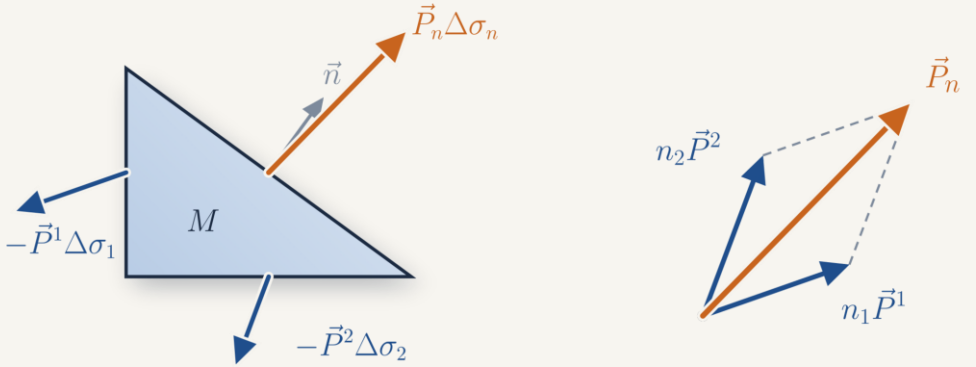
Подставляя $\Delta\sigma_i = n_i \Delta\sigma_n$, получаем **формулу Коши**:

$$\vec{P}_n = n_1\vec{P}^1 + n_2\vec{P}^2 + n_3\vec{P}^3 = n_i\vec{P}^{\,i} \tag{9.2}$$

В проекциях на оси координат:

$$\begin{aligned} P_{n1} &= n_1P^{11} + n_2P^{21} + n_3P^{31} = n_iP^{i1} \\ P_{n2} &= n_1P^{12} + n_2P^{22} + n_3P^{32} = n_iP^{i2} \\ P_{n3} &= n_1P^{13} + n_2P^{23} + n_3P^{33} = n_iP^{i3} \end{aligned} \tag{9.3}$$

Чтобы знать напряжение на любой площадке в точке, достаточно знать три вектора P^1, P^2, P^3.



Плоский аналог: силы на гранях элемента и сложение $P_n = n_1P^1 + n_2P^2$

Тензор напряжений

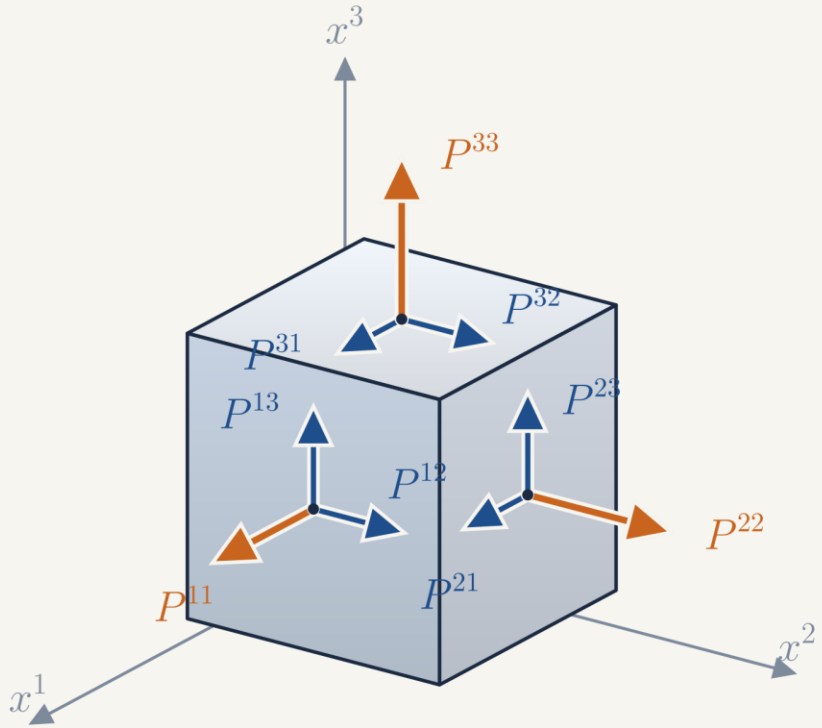
Формулу (9.3) можно записать в виде

$$\vec{P}_n = n_i \vec{P}^{\,i} = n_i\, P^{ik}\, \vec{\mathfrak{e}}_k, \qquad n_i = \vec{\mathfrak{e}}_i \cdot \vec{n} \tag{9.4}$$

Совокупность девяти величин

$$P = \|P^{ik}\| = \begin{pmatrix} P^{11} & P^{12} & P^{13} \\ P^{21} & P^{22} & P^{23} \\ P^{31} & P^{32} & P^{33} \end{pmatrix} \tag{9.5}$$

образует тензор второго ранга — **тензор внутренних напряжений** (тензор напряжений). Он зависит только от координат точки и времени.



Компоненты P^{ik} на гранях элементарного куба: нормальные (оранжевые) и касательные (синие)

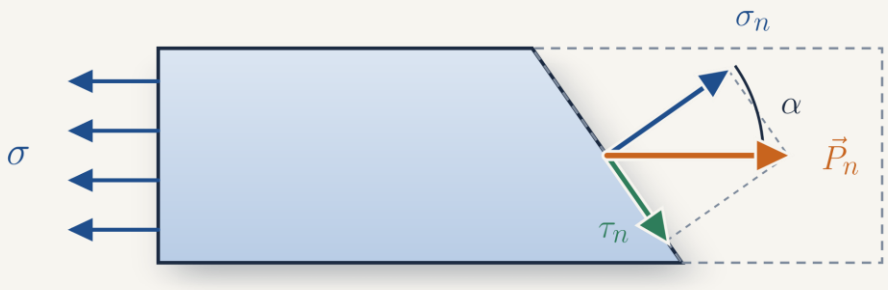
Нормальное и касательное напряжения

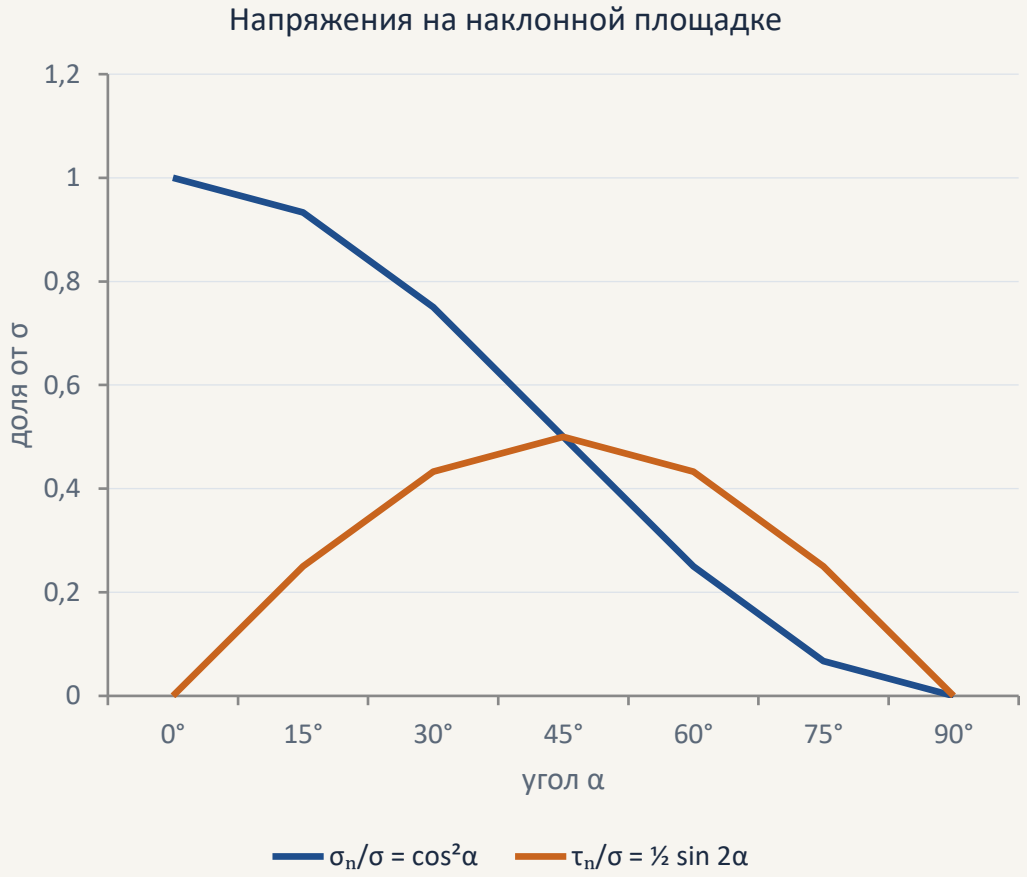
Вектор $\mathbf{P_n}$ раскладывается на **нормальное** σ_n и **касательное** τ_n напряжения:

$$\sigma_n = \vec{P}_n \cdot \vec{n} = P^{ik} n_i n_k, \qquad \tau_n = \sqrt{|\vec{P}_n|^2 - \sigma_n^2}$$

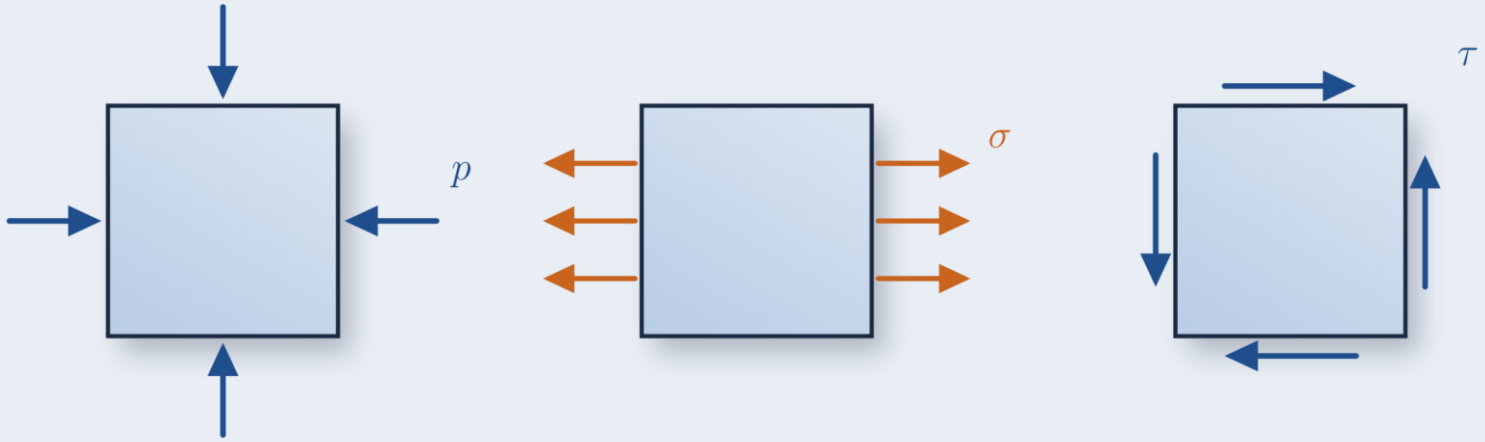
Одноосное растяжение стержня, площадка под углом α:

$$\sigma_n = \sigma \cos^2 \alpha, \qquad \tau_n = \sigma \sin \alpha \cos \alpha = \tfrac{1}{2}\sigma \sin 2\alpha$$





Простейшие напряжённые состояния



всестороннее сжатие | одноосное растяжение | чистый сдвиг

$$P = \begin{pmatrix} -p & 0 & 0 \\ 0 & -p & 0 \\ 0 & 0 & -p \end{pmatrix}$$

Всестороннее сжатие: $P^{ik} = -p\, g^{ik}$ — покоящаяся жидкость, $P_n = -p\mathbf{n}$.

$$P = \begin{pmatrix} \sigma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Одноосное растяжение: стержень, нагруженный вдоль оси x^1.

$$P = \begin{pmatrix} 0 & \tau & 0 \\ \tau & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Чистый сдвиг: только касательные напряжения, $P^{12} = P^{21} = \tau$.

Заключение и вопросы для самоконтроля

Выводы

1. Силы в МСС делятся на массовые (плотность $F = \lim \Delta f/\Delta m$) и поверхностные (вектор напряжений $P = \lim \Delta R/\Delta\sigma$).
2. Вектор напряжений зависит от точки, времени и нормали к площадке: $P = P(M, t, n)$.
3. Из уравнения движения элементарного тетраэдра следует формула Коши $P_n = n_i P^i$.
4. Девять компонент P^{ik} образуют тензор напряжений — функцию только координат и времени.
5. Вектор P_n раскладывается на нормальное σ_n и касательное τ_n напряжения.

Контрольные вопросы

1. Какие силы называют массовыми? Дайте определение плотности массовой силы.
2. Что такое вектор напряжений? От чего он зависит?
3. Почему при стягивании тетраэдра в точку массовые силы и силы инерции выпадают из уравнения?
4. Выведите формулу Коши (9.2) из уравнения (9.1).
5. Как связаны площади граней тетраэдра $\Delta\sigma_i$ и $\Delta\sigma_n$?
6. Что называется тензором напряжений? Запишите его матрицу.
7. Как найти нормальное и касательное напряжения на площадке с нормалью n?
8. На какой площадке касательное напряжение максимально при одноосном растяжении?