Казахский национальный университет имени аль-Фараби

Факультет механико-математический

Кафедра механики

Образовательная программа «6B05403 – Механика»

Дисциплина: Введение в механику сплошной среды

Лекция № 5

Выражение тензора деформаций через компоненты вектора перемещения

Преподаватель: Туралина Динара Елеусизовна

к.ф.-м.н., ассистент-профессор

Алматы, 2026 год

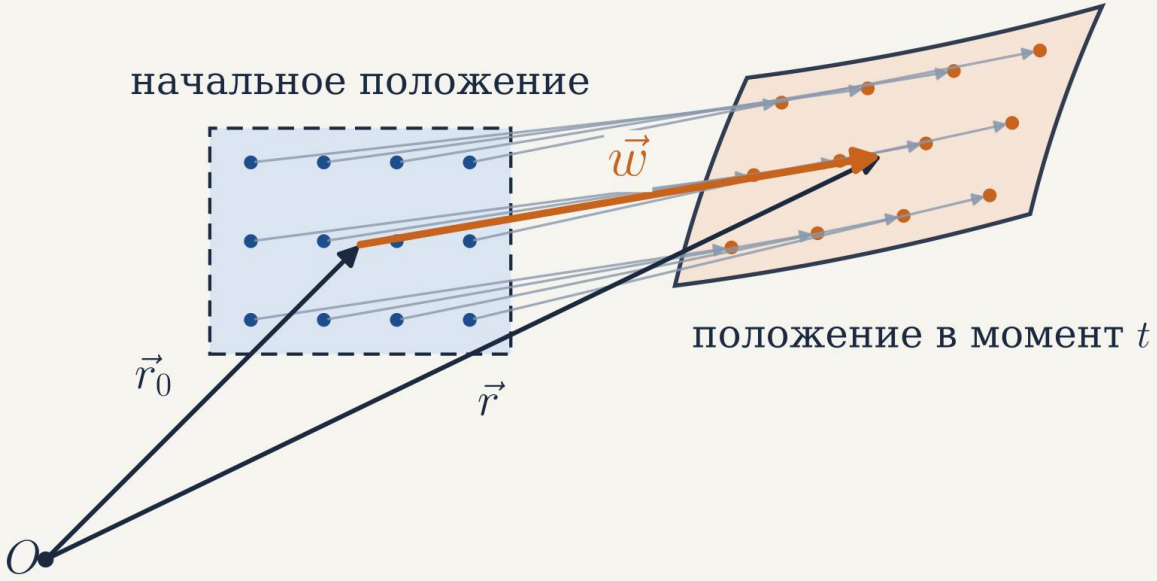
Вектор перемещения

Рассмотрим случай, когда начальное состояние **реально осуществимо**, а его метрика $\mathring{g}_{ij}$, как и метрика $\hat{g}_{ij}$, является **евклидовой**.

Тогда можно ввести **вектор перемещения w**:

$$\vec{r} = \vec{r}_0 + \vec{w}$$

$\mathbf{r_0}$, **r** — радиус-векторы одной и той же частицы *M* относительно системы отсчёта x^1, x^2, x^3 в начальный момент t_0 и в момент *t*.



Поле перемещений: каждая точка начального положения переходит в своё положение в момент t

Производные вектора перемещения по координатам

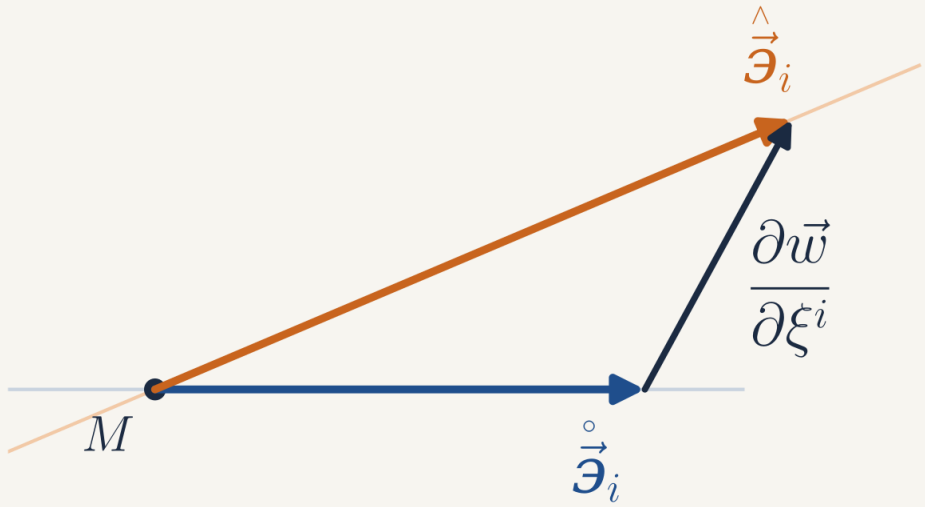
Дифференцируя **r** = **r**$_0$ + **w** по ξ^i, получаем:

$$\frac{\partial \vec{w}}{\partial \xi^i} = \frac{\partial \vec{r}}{\partial \xi^i} - \frac{\partial \vec{r}_0}{\partial \xi^i} = \hat{\vec{\mathfrak{e}}}_i - \mathring{\vec{\mathfrak{e}}}_i$$

откуда векторы базиса двух состояний связаны так:

$$\hat{\vec{\mathfrak{e}}}_i = \mathring{\vec{\mathfrak{e}}}_i + \frac{\partial \vec{w}}{\partial \xi^i}, \qquad \mathring{\vec{\mathfrak{e}}}_i = \hat{\vec{\mathfrak{e}}}_i - \frac{\partial \vec{w}}{\partial \xi^i}$$

Первые производные w по координатам ξ^i характеризуют относительные перемещения точек сплошной среды.



Базисный вектор $\hat{\mathfrak{e}}_i$ получается из $\mathring{\mathfrak{e}}_i$ добавлением $\partial w/\partial \xi^i$

Метрические тензоры через вектор перемещения

Подставляя связь базисов в $\hat{g}_{ij} = \hat{\mathfrak{e}}_i \cdot \hat{\mathfrak{e}}_j$ и $\mathring{g}_{ij} = \mathring{\mathfrak{e}}_i \cdot \mathring{\mathfrak{e}}_j$, получаем:

$$\hat{g}_{ij} = \mathring{g}_{ij} + \overset{\circ}{\vec{\mathfrak{e}}}_i \cdot \frac{\partial \vec{w}}{\partial \xi^j} + \overset{\circ}{\vec{\mathfrak{e}}}_j \cdot \frac{\partial \vec{w}}{\partial \xi^i} + \frac{\partial \vec{w}}{\partial \xi^i} \cdot \frac{\partial \vec{w}}{\partial \xi^j}$$

$$\mathring{g}_{ij} = \hat{g}_{ij} - \overset{\wedge}{\vec{\mathfrak{e}}}_i \cdot \frac{\partial \vec{w}}{\partial \xi^j} - \overset{\wedge}{\vec{\mathfrak{e}}}_j \cdot \frac{\partial \vec{w}}{\partial \xi^i} + \frac{\partial \vec{w}}{\partial \xi^i} \cdot \frac{\partial \vec{w}}{\partial \xi^j}$$

1. Базисы

$\hat{\mathfrak{e}}_i = \mathring{\mathfrak{e}}_i + \partial \mathbf{w}/\partial \xi^i$

2. Метрики

$\hat{g}_{ij}$ и $\mathring{g}_{ij}$ выражаются через производные **w**

3. Деформации

$\varepsilon_{ij} = ½(\hat{g}_{ij} - \mathring{g}_{ij})$ — через перемещения

Тензор деформаций через вектор перемещения

Из определения $\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2}(\hat{g}_{ij} - \mathring{g}_{ij})$ следует (формула 5.1):

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2}\left[\overset{\circ}{\vec{\mathfrak{e}}}_i \cdot \frac{\partial \vec{w}}{\partial \xi^j} + \overset{\circ}{\vec{\mathfrak{e}}}_j \cdot \frac{\partial \vec{w}}{\partial \xi^i} + \frac{\partial \vec{w}}{\partial \xi^i} \cdot \frac{\partial \vec{w}}{\partial \xi^j}\right] \tag{5.1}$$

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2}\left[\hat{\vec{\mathfrak{e}}}_j \cdot \frac{\partial \vec{w}}{\partial \xi^i} + \hat{\vec{\mathfrak{e}}}_i \cdot \frac{\partial \vec{w}}{\partial \xi^j} - \frac{\partial \vec{w}}{\partial \xi^i} \cdot \frac{\partial \vec{w}}{\partial \xi^j}\right]$$

Через начальный базис $\mathring{\mathfrak{e}}_i$

Квадратичный член $\partial w/\partial \xi^i \cdot \partial w/\partial \xi^j$ входит со знаком «+».

Через актуальный базис $\hat{\mathfrak{e}}_i$

Тот же квадратичный член входит со знаком «−».

Смысл

Тензор деформаций полностью определяется первыми производными вектора перемещения.

Два сорта компонент вектора перемещения

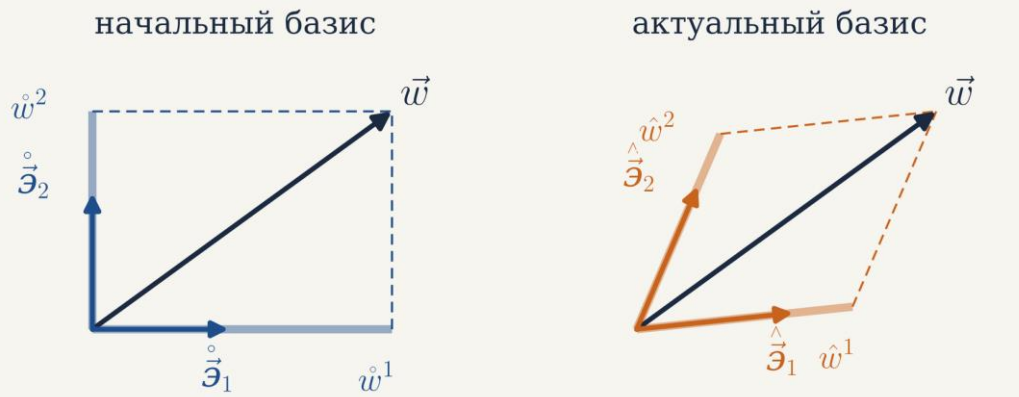
Вектор **w** можно разложить как в актуальном пространстве (базис $\hat{э}_i$), так и в начальном (базис $\mathring{э}_i$):

$$\vec{w} = \hat{w}^k \, \hat{\vec{э}}_k = \mathring{w}^k \, \mathring{\vec{э}}_k$$

Соответственно вводятся **два сорта ковариантных производных**:

$$\frac{\partial \vec{w}}{\partial \xi^i} = \mathring{\nabla}_i \mathring{w}^k \, \mathring{\vec{э}}_k, \qquad \frac{\partial \vec{w}}{\partial \xi^i} = \hat{\nabla}_i \hat{w}^k \, \hat{\vec{э}}_k \tag{5.2}$$

Производная $\mathring{\nabla}_i$ вычисляется с символами Кристоффеля начальной метрики $\mathring{g}_{ij}$, производная $\hat{\nabla}_i$ — актуальной метрики $\hat{g}_{ij}$.



Один вектор w — две системы компонент: $\mathring{w}^k$ в начальном и $\hat{w}^k$ в актуальном базисе

Деформации через ковариантные производные

Подставим первое из равенств (5.2) в (5.1):

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2}\left[\mathring{\nabla}_j \mathring{w}^k \, \mathring{g}_{ki} + \mathring{\nabla}_i \mathring{w}^k \, \mathring{g}_{kj} + \mathring{\nabla}_i \mathring{w}^k \, \mathring{\nabla}_j \mathring{w}^\ell \, \mathring{g}_{k\ell}\right]$$

Компоненты метрического тензора можно вносить под знак ковариантной производной, поэтому

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2}\left[\mathring{\nabla}_j \mathring{w}_i + \mathring{\nabla}_i \mathring{w}_j + \mathring{\nabla}_i \mathring{w}_k \, \mathring{\nabla}_j \mathring{w}^k\right] \tag{5.3}$$

Аналогично, из второго равенства (5.2) и (5.1):

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2}\left[\hat{\nabla}_j \hat{w}_i + \hat{\nabla}_i \hat{w}_j - \hat{\nabla}_i \hat{w}_k \, \hat{\nabla}_j \hat{w}^k\right] \tag{5.3′}$$

Начальное состояние

Формула (5.3): удобна в переменных Лагранжа.

Актуальное состояние

Формула (5.3′): удобна в переменных Эйлера.

Малые деформации: линеаризация

В случае **бесконечно малых** относительных перемещений

$$\left|\frac{\partial w_i}{\partial x^j}\right| \ll 1$$

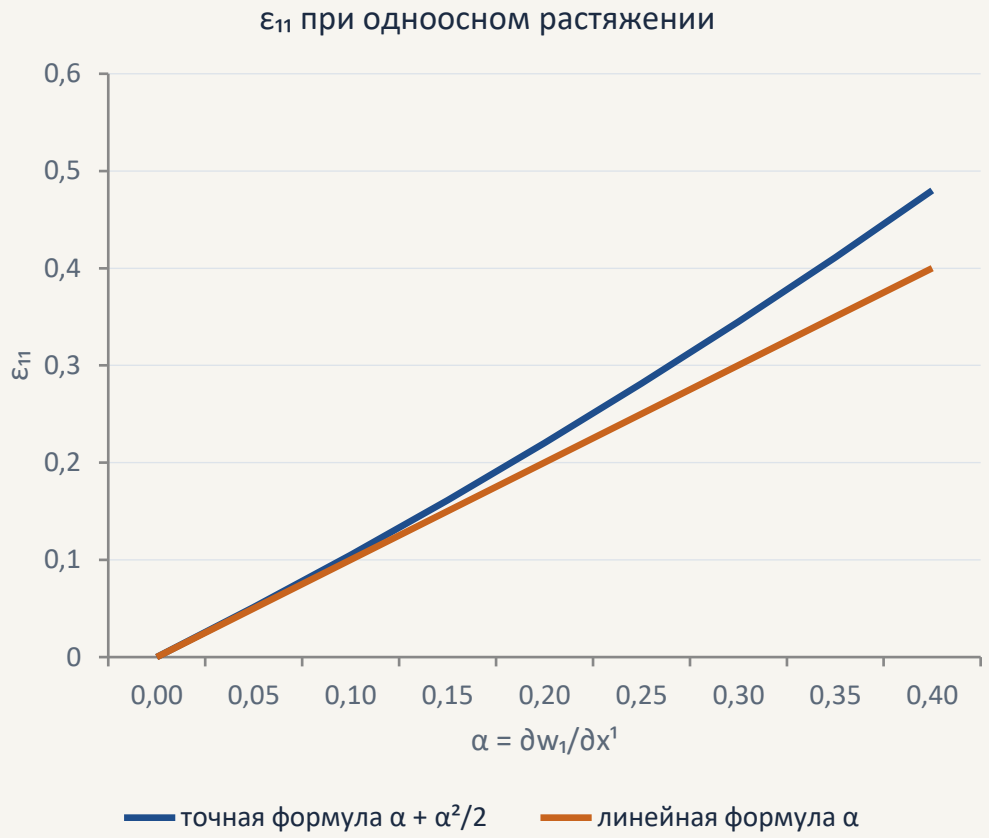
квадратичными по **w** членами пренебрегают:

$$\varepsilon_{ij} = \tfrac{1}{2}\left(\mathring{\nabla}_j \mathring{w}_i + \mathring{\nabla}_i \mathring{w}_j\right) = \tfrac{1}{2}\left(\hat{\nabla}_j \hat{w}_i + \hat{\nabla}_i \hat{w}_j\right) \qquad (5.4)$$

Пример — одноосное растяжение:

$$w_1 = \alpha\, x^1: \qquad \varepsilon_{11}^{\text{точн}} = \alpha + \tfrac{1}{2}\alpha^2, \qquad \varepsilon_{11}^{\text{лин}} = \alpha$$

При α = 0,1 ошибка линейной формулы — около 5 %.



Тензор малых деформаций в декартовой системе

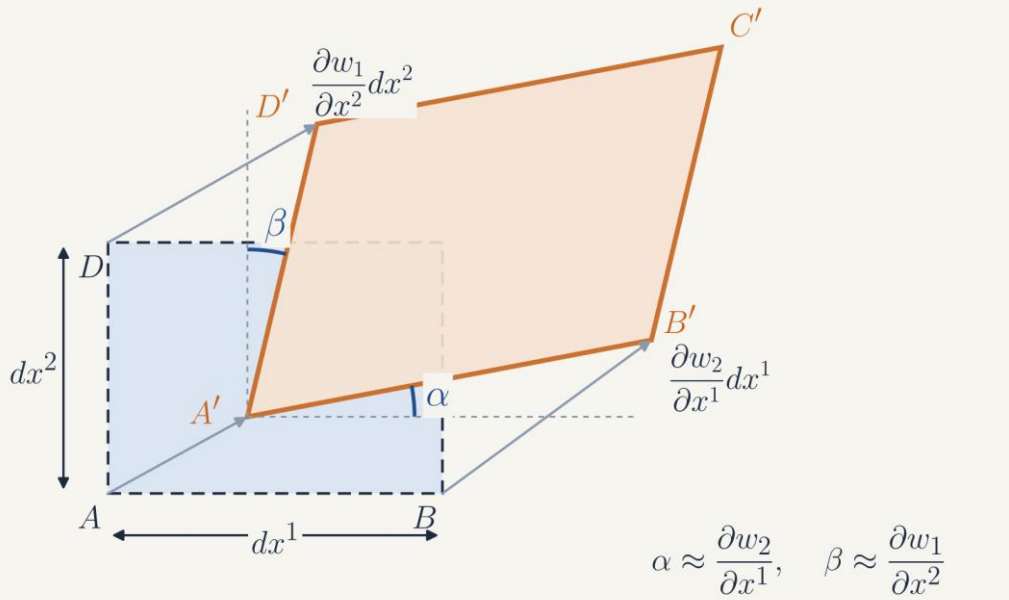
В декартовой системе ковариантные производные совпадают с частными:

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial w_j}{\partial x^i} + \frac{\partial w_i}{\partial x^j}\right) \tag{5.5}$$

В развёрнутом виде:

$$\varepsilon_{11} = \frac{\partial w_1}{\partial x^1}, \quad \varepsilon_{22} = \frac{\partial w_2}{\partial x^2}, \quad \varepsilon_{33} = \frac{\partial w_3}{\partial x^3}$$

Диагональные компоненты — удлинения волокон вдоль осей; **недиагональные** — половины углов сдвига: $2\varepsilon_{12} = \alpha + \beta$.



Деформация элемента ABCD: $\alpha \approx \partial w_2/\partial x^1$, $\beta \approx \partial w_1/\partial x^2$

$$\varepsilon_{12} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial w_1}{\partial x^2} + \frac{\partial w_2}{\partial x^1}\right), \quad \varepsilon_{23} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial w_2}{\partial x^3} + \frac{\partial w_3}{\partial x^2}\right), \quad \varepsilon_{13} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial w_1}{\partial x^3} + \frac{\partial w_3}{\partial x^1}\right)$$

Пример 1: малый поворот тела

Поворот тела как целого на малый угол ф вокруг оси x^3:

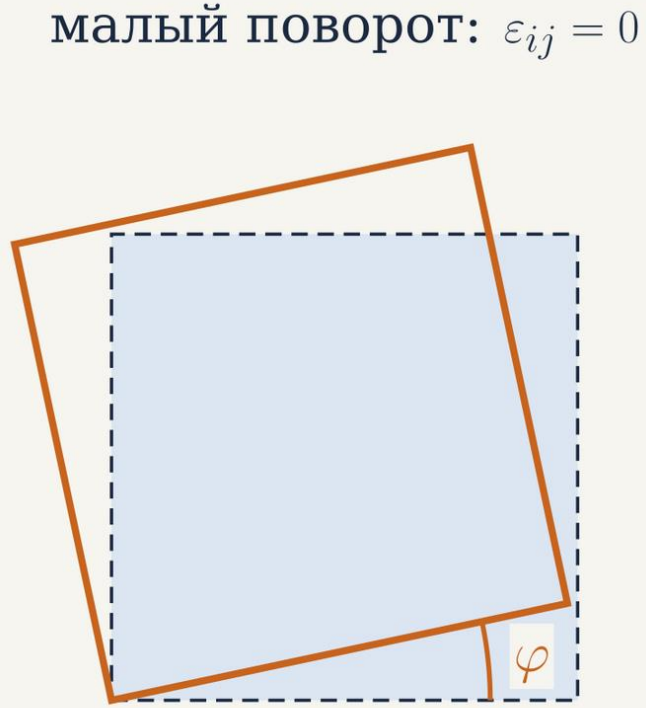
$$w_1 = -\varphi\, x^2, \quad w_2 = \varphi\, x^1 : \qquad \varepsilon_{11} = \varepsilon_{22} = 0, \quad \varepsilon_{12} = \tfrac{1}{2}(-\varphi + \varphi) = 0$$

По линейной формуле (5.5) деформации нет — так и должно быть при движении абсолютно твёрдого тела.

Точная формула (5.3) даёт

$$\varepsilon_{11}^{\text{точн}} = \varepsilon_{22}^{\text{точн}} = \tfrac{1}{2}\varphi^2$$

Это величина второго порядка малости. Линейная теория верна, когда малы и деформации, и углы поворота.



Малый поворот элемента без изменения формы: $\varepsilon_{ij} = 0$

Пример 2: простой сдвиг

Поле перемещений простого сдвига:

$$w_1 = \gamma\, x^2, \quad w_2 = 0: \qquad \varepsilon_{11} = \varepsilon_{22} = 0, \quad \varepsilon_{12} = \frac{\gamma}{2}$$

Угол сдвига $\chi_{12} = 2\varepsilon_{12} = \gamma$ — совпадает с результатом лекции 4.

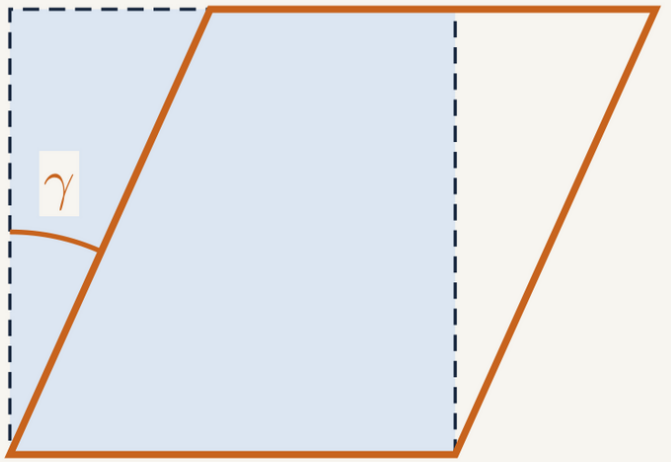
Удлинения

$\varepsilon_{11} = \varepsilon_{22} = 0$: волокна вдоль осей не меняют длину (в линейном приближении).

Сдвиг

$\varepsilon_{12} = \gamma/2$: прямой угол между осями x^1 и x^2 уменьшается на γ.

простой сдвиг: $\varepsilon_{12} = \gamma/2$



Простой сдвиг: прямой угол скашивается на γ

Заключение и вопросы для самоконтроля

Выводы

1. Если начальное состояние реально осуществимо, вводится вектор перемещения $w = r - r_o$.
2. Производные $\partial w/\partial \xi^i = \hat{e}_i - \mathring{e}_i$ характеризуют относительные перемещения точек среды.
3. Тензор деформаций выражается через ковариантные производные w: формулы (5.3) и (5.3′).
4. При малых деформациях: $\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2}(\nabla_j w_i + \nabla_i w_j)$.
5. В декартовой системе: $\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2}(\partial w_j/\partial x^i + \partial w_i/\partial x^j)$.

Контрольные вопросы

1. При каком условии можно ввести вектор перемещения?
2. Как связаны векторы базиса начального и актуального состояний?
3. Запишите тензор деформаций через вектор перемещения (5.1).
4. Чем отличаются ковариантные производные $\overset{*}{\nabla}_i$ и ∇_i?
5. Почему квадратичный член входит в (5.3) и (5.3′) с разными знаками?
6. При каких условиях справедлива линейная формула (5.4)?
7. Найдите ε_{ij} для поля $w_1 = -\phi x^2$, $w_2 = \phi x^1$. Как объяснить результат?