Казахский национальный университет имени аль-Фараби

Факультет механико-математический

Кафедра механики

Образовательная программа «6B05403 – Механика»

Дисциплина: Введение в механику сплошной среды

Лекция № 8

Уравнения неразрывности в переменных Лагранжа и Эйлера

Преподаватель: Туралина Динара Елеусизовна

к.ф.-м.н., ассистент-профессор

Алматы, 2026 год

Масса и плотность сплошной среды

Массу можно ввести для всего объёма τ и для любой его частицы; **средняя плотность** в объёме Δτ:

$$m = \sum_{i=1}^{n} m_i$$

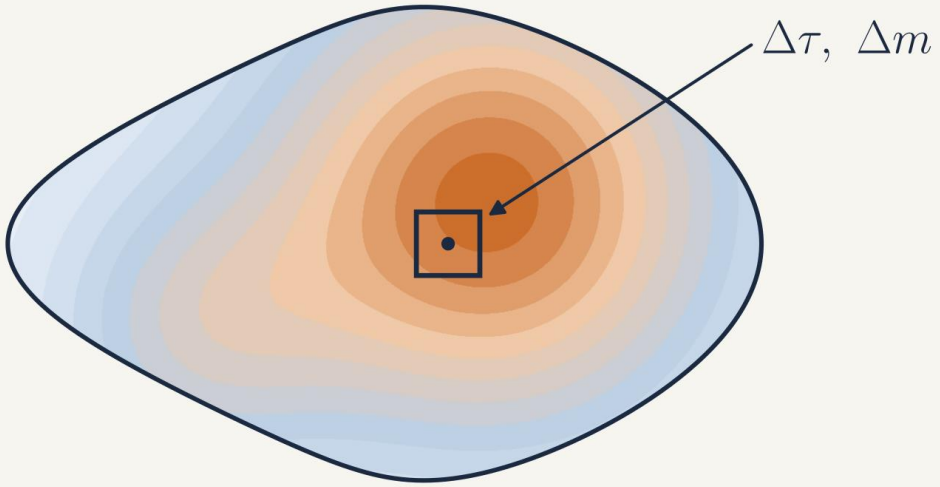
$$\rho^* = \frac{\Delta m}{\Delta \tau}$$

Истинная плотность в данной точке:

$$\rho = \lim_{\Delta\tau \to 0} \frac{\Delta m}{\Delta \tau} = \frac{dm}{d\tau}$$

Плотность — скалярная функция переменных Лагранжа или Эйлера:

$$\rho = \rho(\xi^k, t) \qquad \text{или} \qquad \rho = \rho(x^k, t)$$



Распределение плотности в теле; элементарный объём Δτ с массой Δm

Закон сохранения массы

При заданной плотности масса элементарного объёма и всего тела:

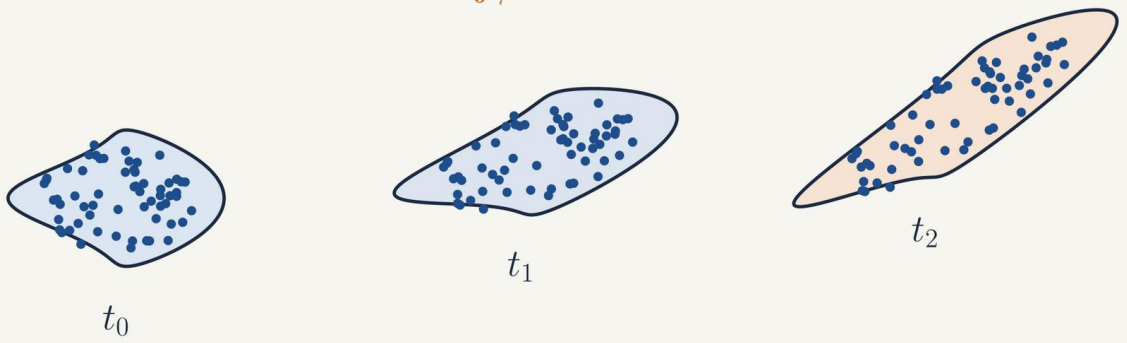
$$dm = \rho\, d\tau, \qquad m = \int_\tau \rho\, d\tau$$

Изменение со временем любой величины характеризуется **индивидуальной производной**, поэтому закон сохранения массы:

$$\frac{dm}{dt} = 0 \qquad \text{или} \qquad \frac{d}{dt}\int_\tau \rho\, d\tau = 0 \tag{8.1}$$

Объём τ — **индивидуальный**: он всё время состоит из одних и тех же частиц.

$$m = \int_\tau \rho\, d\tau = \text{const}$$



Один и тот же индивидуальный объём в моменты t_0, t_1, t_2: форма меняется, масса — нет

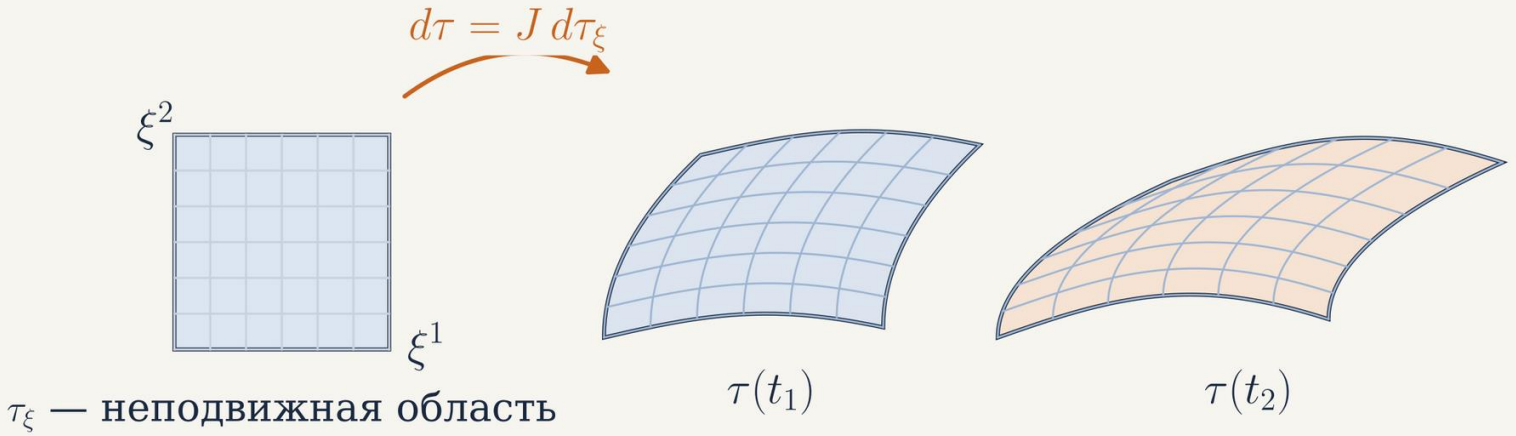
Закон сохранения массы в переменных Лагранжа

Пусть $\rho = \rho(\xi^k, t)$. Перейдём от переменных x^i к переменным ξ^k; объём преобразуется через якобиан:

$$d\tau = dx^1 dx^2 dx^3 = J\, d\xi^1 d\xi^2 d\xi^3 = d\tau_\xi, \qquad J = \left|\frac{\partial x^i}{\partial \xi^k}\right|$$

Тогда закон (8.1) записывается как интеграл по **неподвижной** области τ_ξ; производную можно внести под знак интеграла:

$$\frac{d}{dt}\int_{\tau_\xi} \rho(\xi^k, t)\, J\, d\xi^1 d\xi^2 d\xi^3 = \int_{\tau_\xi} \frac{d}{dt}(J\rho)\, d\xi^1 d\xi^2 d\xi^3 = 0$$



Уравнение неразрывности в переменных Лагранжа

В силу произвольности выбора объёма подынтегральное выражение равно нулю:

$$\frac{d}{dt}\left(J\rho\right) = 0 \tag{8.2}$$

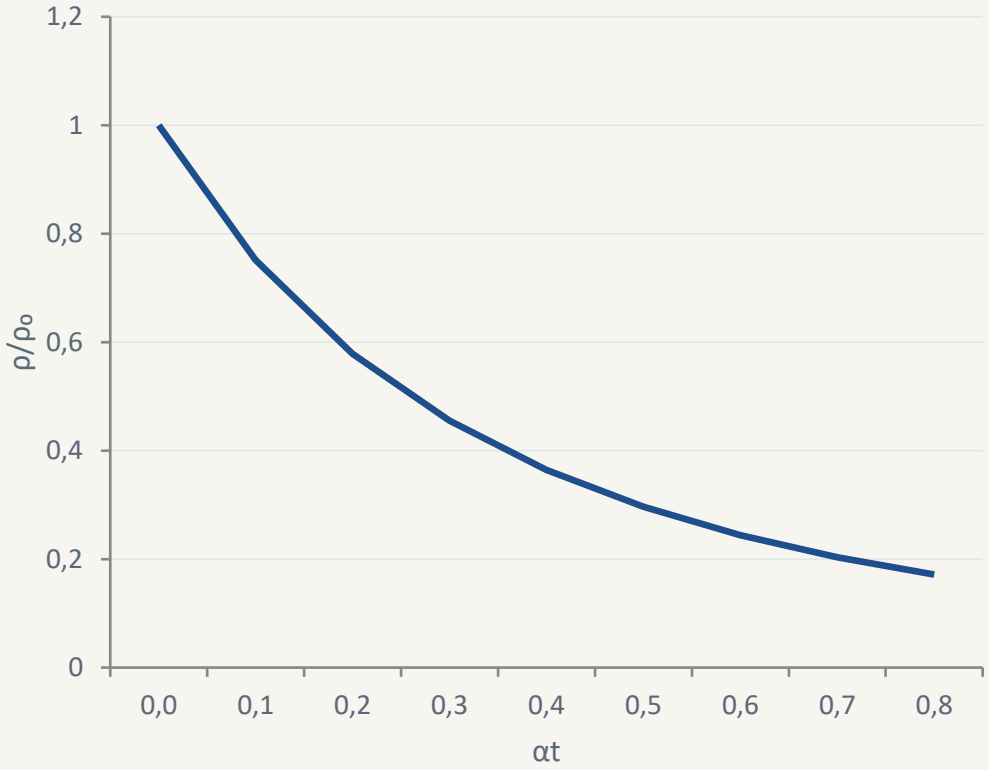
Это **уравнение неразрывности в дифференциальной форме в переменных Лагранжа**. Интегрируя по времени:

$$\rho\, J = \rho_0\, J_0 = \rho_0 \qquad (J_0 = 1)$$

Пример — всестороннее расширение:

$$x^i = (1+\alpha t)\,\xi^i : \qquad J = (1+\alpha t)^3, \qquad \rho = \frac{\rho_0}{(1+\alpha t)^3}$$

Плотность при всестороннем расширении



Производная интеграла по подвижному объёму

Воспользуемся в (8.1) правилом дифференцирования интеграла, взятого по подвижному объёму:

$$\frac{d}{dt}\int_{\tau}\rho\,d\tau=\int_{\tau}\left[\frac{\partial\rho}{\partial t}+\nabla\cdot(\rho\vec{v})\right]d\tau=\int_{\tau}\left[\frac{\partial\rho}{\partial t}+\nabla_i(\rho v^i)\right]d\tau=0$$

∂ρ/∂t

локальное изменение плотности в неподвижной точке пространства

∇·(ρv)

вытекание массы через границу объёма: дивергенция потока массы ρv

Сумма = 0

масса индивидуального объёма сохраняется

Уравнение неразрывности в переменных Эйлера

В силу произвольности объёма получаем основное дифференциальное уравнение МСС:

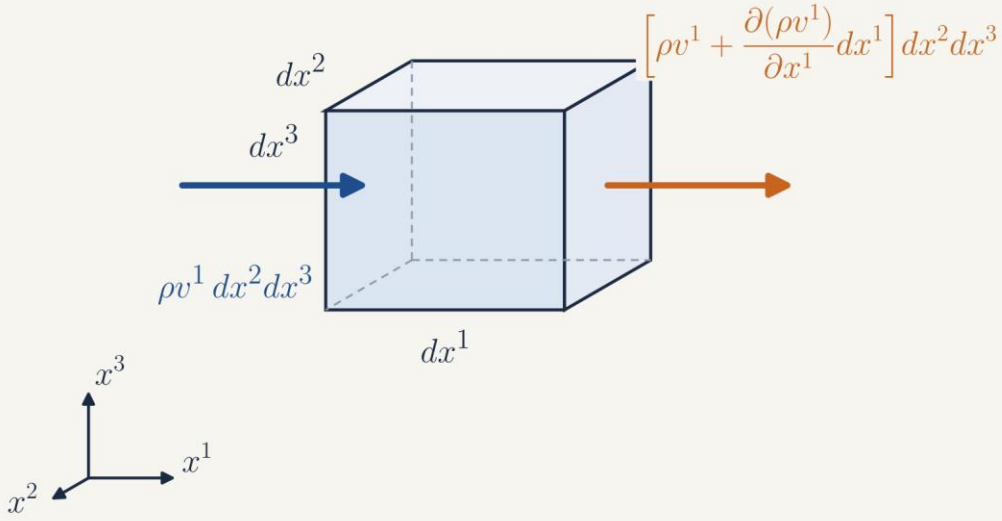
$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla_i \left(\rho v^i \right) = 0 \tag{8.3}$$

— **уравнение неразрывности в переменных Эйлера**.

Смысл: разность потоков массы через противоположные грани элементарного куба

$$\left[\rho v^1\right]_{x^1+dx^1} - \left[\rho v^1\right]_{x^1} = \frac{\partial(\rho v^1)}{\partial x^1}\, dx^1$$

равна убыли массы внутри куба за единицу времени.



Поток массы через грани элементарного объёма $dx^1 dx^2 dx^3$

Другая форма уравнения неразрывности

Используя правило векторного анализа $\nabla_i(\rho v^i) = v^i\nabla_i\rho + \rho\nabla_i v^i$ и определение индивидуальной производной, перепишем (8.3) в виде:

$$\frac{d\rho}{dt} + \rho\,\nabla_i v^i = 0$$

Дивергенция скорости — скорость относительного изменения объёма частицы:

$$\nabla_i v^i = \frac{1}{J}\frac{dJ}{dt} = \frac{1}{d\tau}\frac{d\,(d\tau)}{dt}$$

Связь с формой Лагранжа

Так как $dJ/dt = J\,\nabla_i v^i$, уравнения $d(J\rho)/dt = 0$ и $d\rho/dt + \rho\nabla_i v^i = 0$ эквивалентны.

Смысл

Плотность частицы растёт, если её объём уменьшается ($\nabla_i v^i < 0$), и падает при расширении.

Стационарное поле плотности

Если поле плотности стационарно (∂ρ/∂t = 0), уравнение (8.3) принимает вид

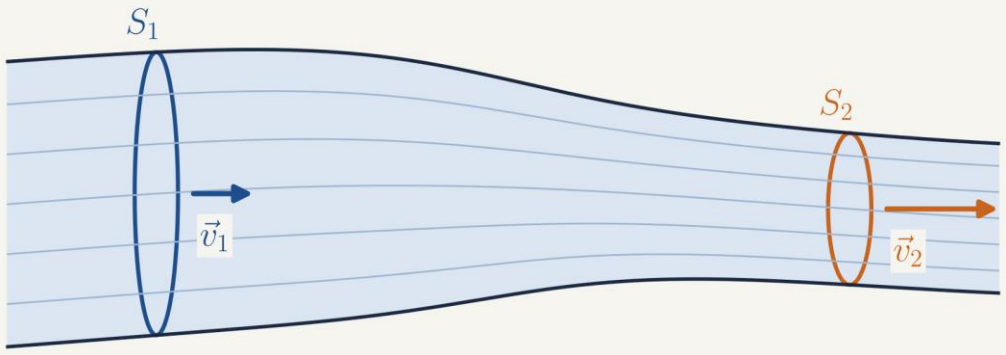
$$\nabla_i \left(\rho v^i\right) = 0$$

В прямоугольной декартовой системе координат:

$$\operatorname{div}(\rho\vec{v}) = \frac{\partial(\rho v^1)}{\partial x^1} + \frac{\partial(\rho v^2)}{\partial x^2} + \frac{\partial(\rho v^3)}{\partial x^3} = 0$$

Для трубки тока отсюда следует постоянство массового расхода:

$$\rho_1 v_1 S_1 = \rho_2 v_2 S_2$$



Трубка тока: через любое сечение проходит одна и та же масса в единицу времени

Несжимаемая среда

Если среда **несжимаема** (dρ/dt = 0), уравнение неразрывности даёт

$$\nabla_i v^i = 0$$

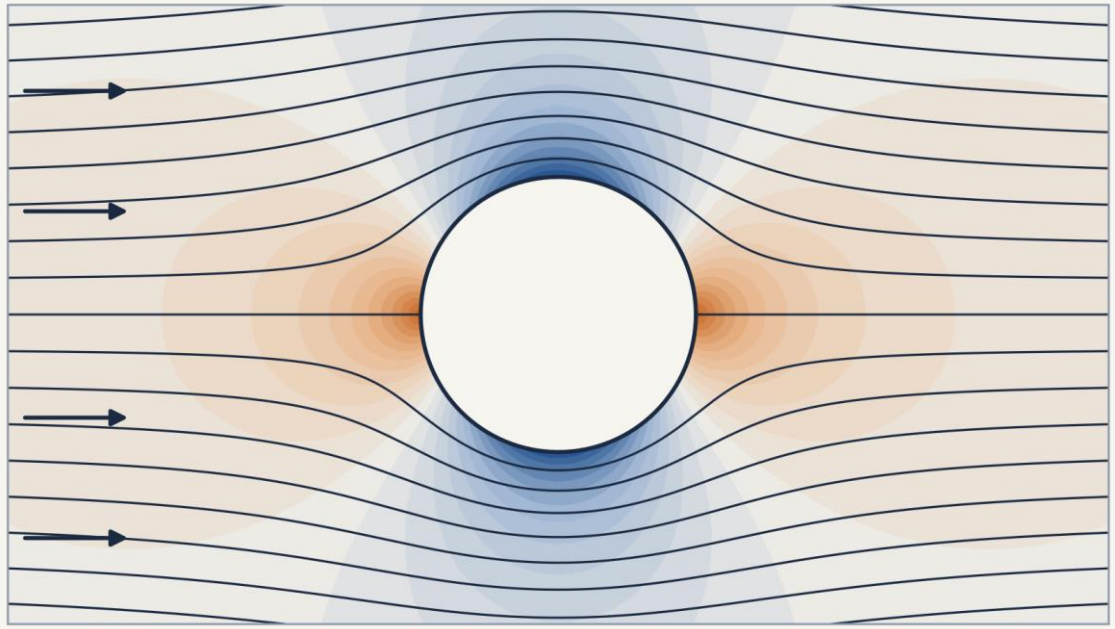
В декартовых прямоугольных координатах:

$$\operatorname{div} \vec{v} = \frac{\partial v^1}{\partial x^1} + \frac{\partial v^2}{\partial x^2} + \frac{\partial v^3}{\partial x^3} = 0$$

Для трубки тока: объёмный расход постоянен —

$$v_1 S_1 = v_2 S_2$$

в узком сечении скорость больше.



Обтекание цилиндра несжимаемой жидкостью: div v = 0, линии тока сгущаются там, где скорость больше

Уравнение неразрывности: сводка

Случай	Переменные Лагранжа	Переменные Эйлера
Общий случай	$\frac{d}{dt}(J\rho) = 0$	$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla_i(\rho v^i) = 0$
Другая форма	$\rho\, J = \rho_0$	$\frac{d\rho}{dt} + \rho\, \nabla_i v^i = 0$
Несжимаемая среда	$J = 1$	$\nabla_i v^i = 0$

Заключение и вопросы для самоконтроля

Выводы

1. Плотность $\rho = dm/d\tau$ — скалярная функция переменных Лагранжа или Эйлера.
2. Закон сохранения массы: масса индивидуального объёма постоянна, $d/dt \int \rho d\tau = 0$.
3. В переменных Лагранжа: $d(J\rho)/dt = 0$, т.е. $\rho J = \rho_0$.
4. В переменных Эйлера: $\partial\rho/\partial t + \nabla_i(\rho v^i) = 0$, или $d\rho/dt + \rho\nabla_i v^i = 0$.
5. Для несжимаемой среды $\operatorname{div} v = 0$; при стационарной плотности $\operatorname{div}(\rho v) = 0$.

Контрольные вопросы

1. Как определяются средняя и истинная плотность среды?
2. Сформулируйте закон сохранения массы для индивидуального объёма.
3. Как выводится уравнение неразрывности в переменных Лагранжа?
4. Как изменяется плотность при всестороннем расширении $x = (1 + \alpha t)\xi$?
5. Запишите уравнение неразрывности в переменных Эйлера и поясните смысл слагаемых.
6. Как связаны формы уравнения неразрывности Лагранжа и Эйлера?
7. Какой вид имеет уравнение неразрывности для стационарного поля плотности и для несжимаемой среды?