Казахский национальный университет имени аль-Фараби

Факультет механико-математический

Кафедра механики

Образовательная программа «6B05403 – Механика»

Дисциплина: Введение в механику сплошной среды

Лекция № 10

Уравнения динамики сплошной среды. Уравнение момента количества движения

Преподаватель: Туралина Динара Елеусизовна

к.ф.-м.н., ассистент-профессор

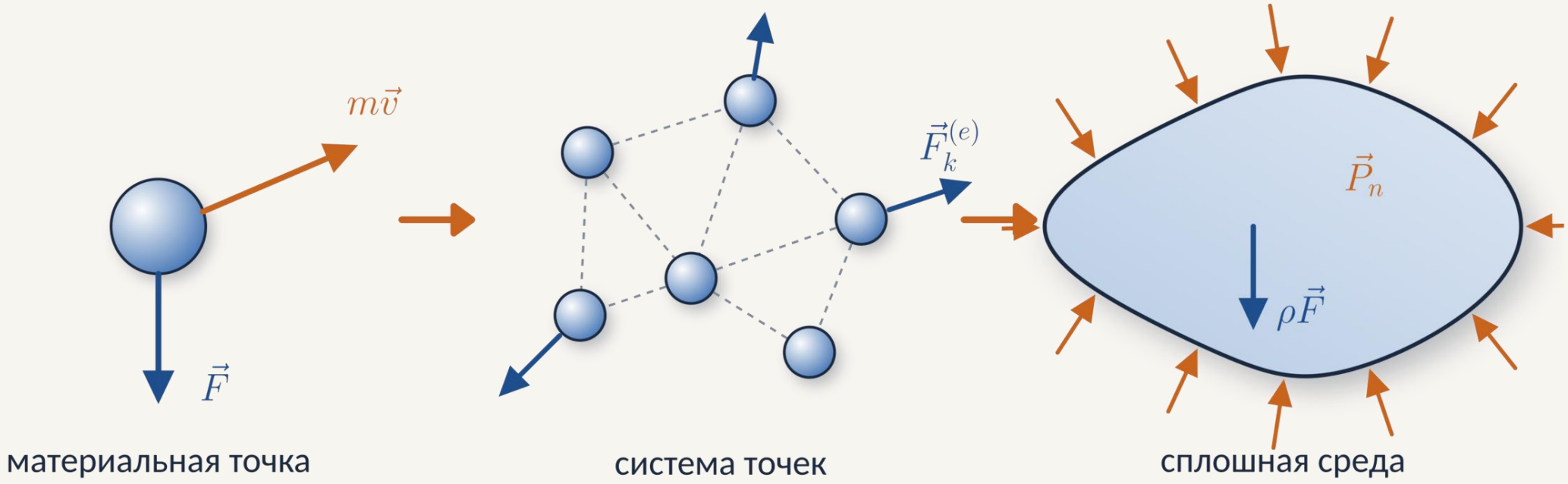
Алматы, 2026 год

От закона Ньютона к сплошной среде

Второй закон Ньютона: индивидуальная производная количества движения точки равна приложенной силе. Для системы n точек — сумма внешних сил:

$$\frac{d}{dt}\left(m\vec{v}\right) = \vec{F}$$

$$\frac{d}{dt}\sum_{k=1}^{n} m_k \vec{v}_k = \sum_{k=1}^{n} \vec{F}_k^{(e)}$$



Уравнение количества движения

Для объёма τ сплошной среды с поверхностью σ под действием массовых и поверхностных сил:

$$\frac{d}{dt}\int_{\tau}\rho\vec{v}\,d\tau = \int_{\tau}\rho\vec{F}\,d\tau + \int_{\sigma}\vec{P}_n\,d\sigma \qquad (10.1)$$

Количество движения

∫ρ**v**dτ — импульс объёма τ; берётся индивидуальная производная по времени.

Массовые силы

∫ρ**F**dτ — главный вектор массовых сил, действующих на объём.

Поверхностные силы

∫$\mathbf{P}_n$dσ — главный вектор сил, приложенных к поверхности σ.

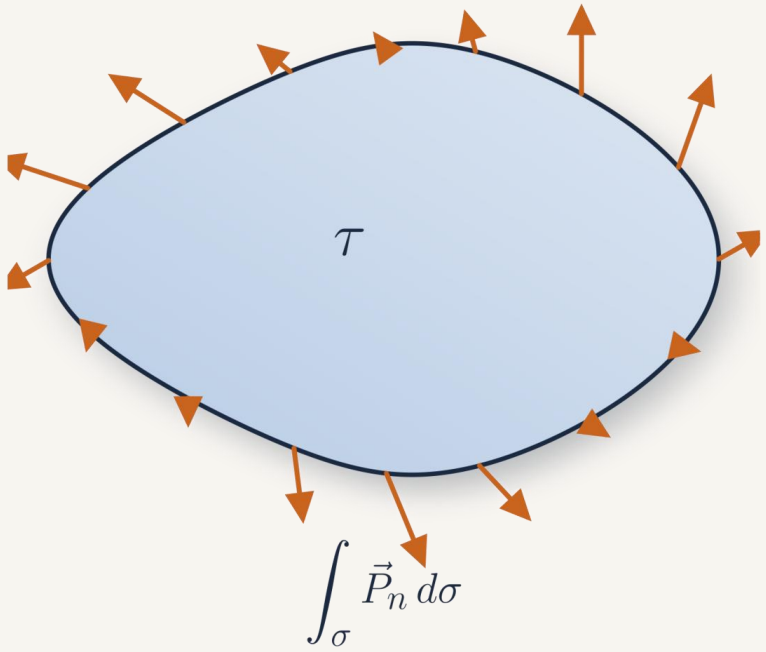
Индивидуальная производная от количества движения объёма τ равна сумме всех внешних массовых и поверхностных сил.

Переход к объёмному интегралу

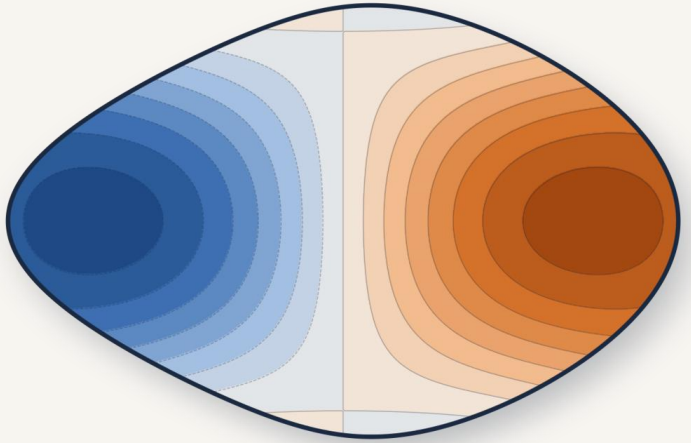
Для непрерывных движений преобразуем поверхностный интеграл по формуле Гаусса — Остроградского, используя формулу Коши $\mathbf{P}_n = n_i \mathbf{P}^i$:

$$\int_\sigma \vec{P}_n \, d\sigma = \int_\sigma n_i \vec{P}^{\,i} \, d\sigma = \int_\tau \nabla_i \vec{P}^{\,i} \, d\tau$$

$$\int_\tau \left[\rho \frac{d\vec{v}}{dt} - \rho \vec{F} - \nabla_i \vec{P}^{\,i} \right] d\tau = 0$$



$=$



$$\int_\tau \nabla_i \vec{P}^{\,i} \, d\tau$$

Основное уравнение динамики в напряжениях

Ввиду произвольности объёма получаем дифференциальное уравнение — **основное уравнение динамики сплошной среды в напряжениях**:

$$\rho \frac{d\vec{v}}{dt} = \rho\vec{F} + \nabla_i \vec{P}^{\,i} \tag{10.2}$$

В системе координат (x^1, x^2, x^3) — три скалярных уравнения:

$$\rho \frac{dv^i}{dt} = \rho F^i + \nabla_j P^{ij} \tag{10.3}$$

где ускорение в переменных Эйлера:

$$\frac{dv^i}{dt} = \frac{\partial v^i}{\partial t} + v^j \nabla_j v^i$$

$\rho\, dv/dt$

сила инерции единицы объёма

ρF

массовая сила, приходящаяся на единицу объёма

$\nabla_i P^i$

равнодействующая напряжений, действующих на единицу объёма

Физический смысл: баланс сил на элементе

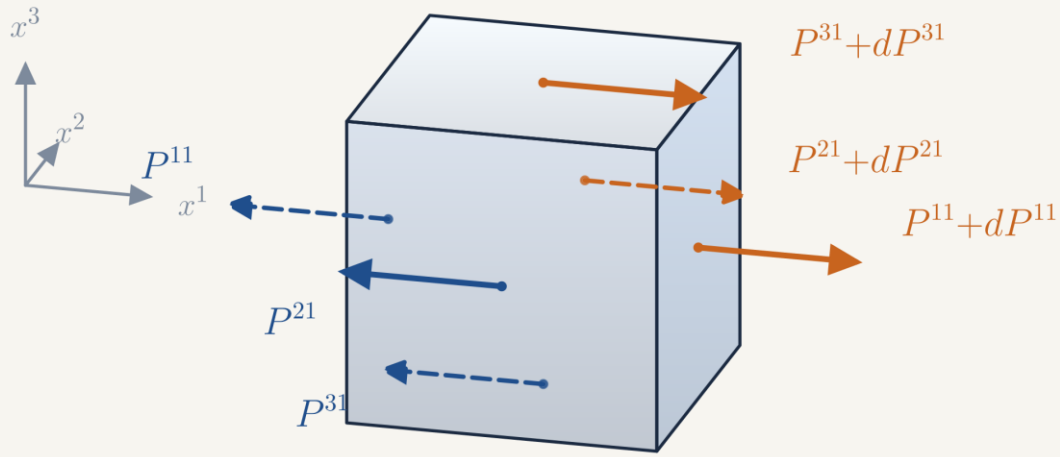
В декартовых координатах первое из уравнений (10.3):

$$\rho \frac{dv_1}{dt} = \rho F_1 + \frac{\partial P^{11}}{\partial x^1} + \frac{\partial P^{12}}{\partial x^2} + \frac{\partial P^{13}}{\partial x^3}$$

Разность сил на противоположных гранях, перпендикулярных x^1:

$$\left[P^{11} + \frac{\partial P^{11}}{\partial x^1} dx^1\right] dx^2 dx^3 - P^{11} dx^2 dx^3 = \frac{\partial P^{11}}{\partial x^1} d\tau$$

Равнодействующая напряжений по оси x^1 складывается из трёх таких разностей: от граней x^1, x^2 и x^3 ($dP^{i1} = \partial P^{i1}/\partial x^i \, dx^i$).



Силы вдоль оси x^1 на гранях элемента: пунктир — на невидимых гранях

Уравнения равновесия сплошной среды

Если среда покоится, то $v^i = w^i = 0$, и из (10.3) следует, что массовые силы уравновешиваются внутренними поверхностными:

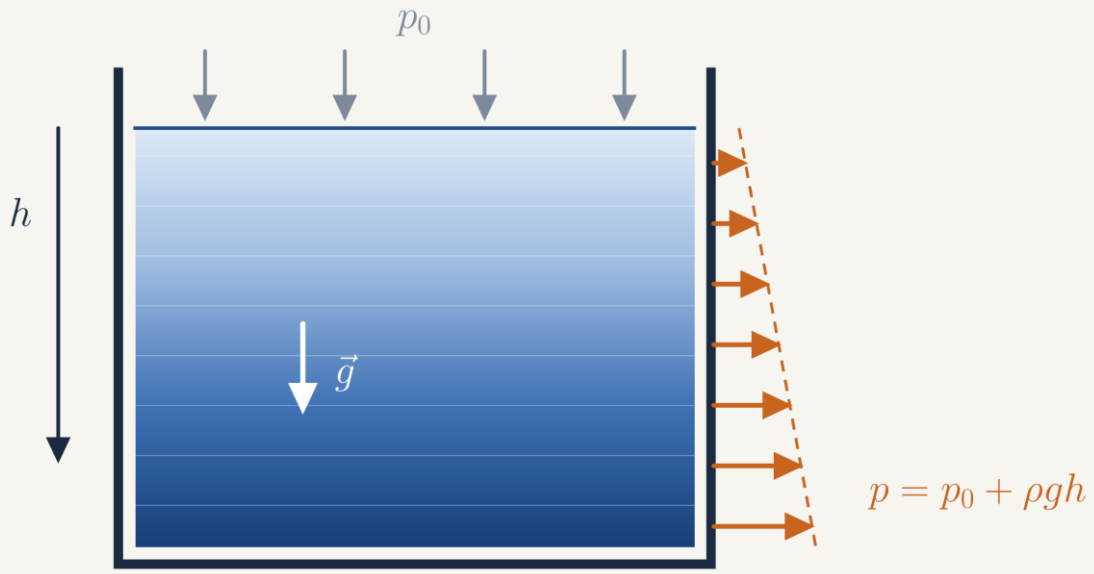
$$\rho F^i + \nabla_j P^{ij} = 0 \tag{10.4}$$

Пример — гидростатика. Покоящаяся жидкость в поле тяжести:

$$P^{ij} = -p\,\delta^{ij}, \quad \vec{F} = \vec{g} \quad \Rightarrow \quad \nabla p = \rho \vec{g}$$

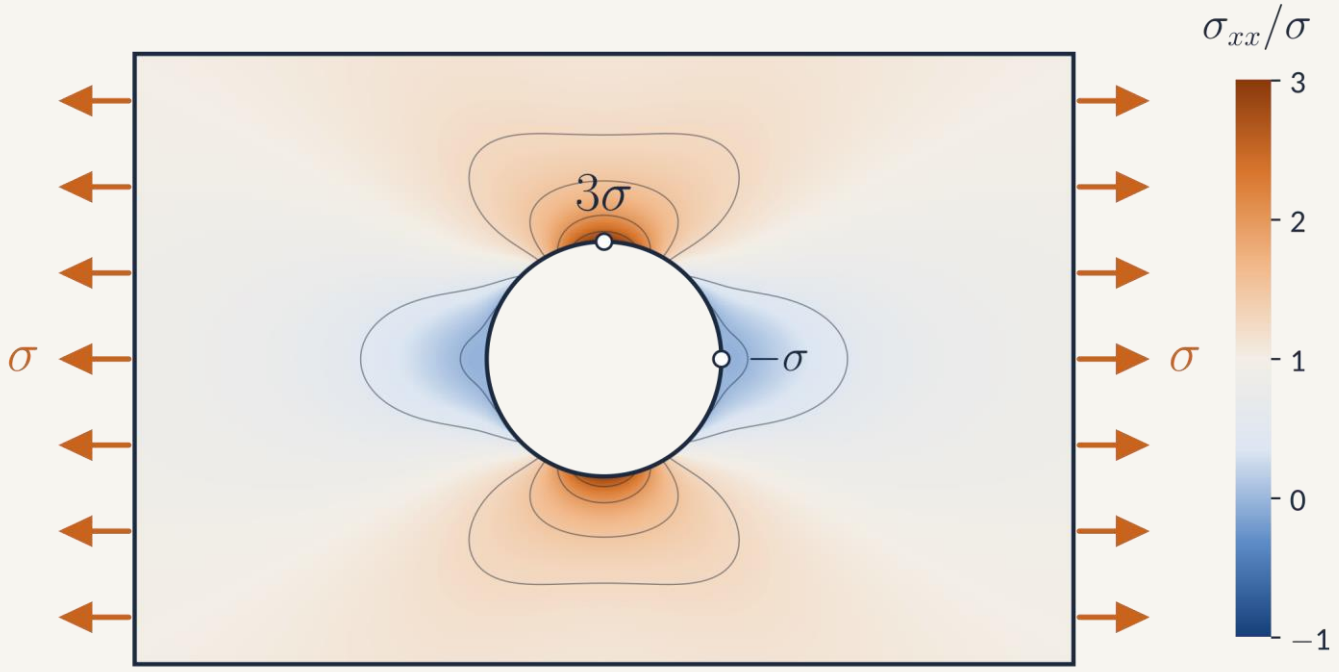
Давление растёт линейно с глубиной *h*:

$$p = p_0 + \rho g\, h$$



Давление в покоящейся жидкости и его эпюра на стенке сосуда

Пример: концентрация напряжений у отверстия



Пластина с круговым отверстием при растяжении σ: поле σ_{xx}/σ (решение Кирша)

Поле напряжений удовлетворяет уравнениям равновесия (10.4). Вдоль оси y (θ = 90°):

$$\sigma_{\theta\theta}\Big|_{\theta=90^\circ} = \frac{\sigma}{2}\left(2 + \frac{a^2}{r^2} + \frac{3a^4}{r^4}\right)$$



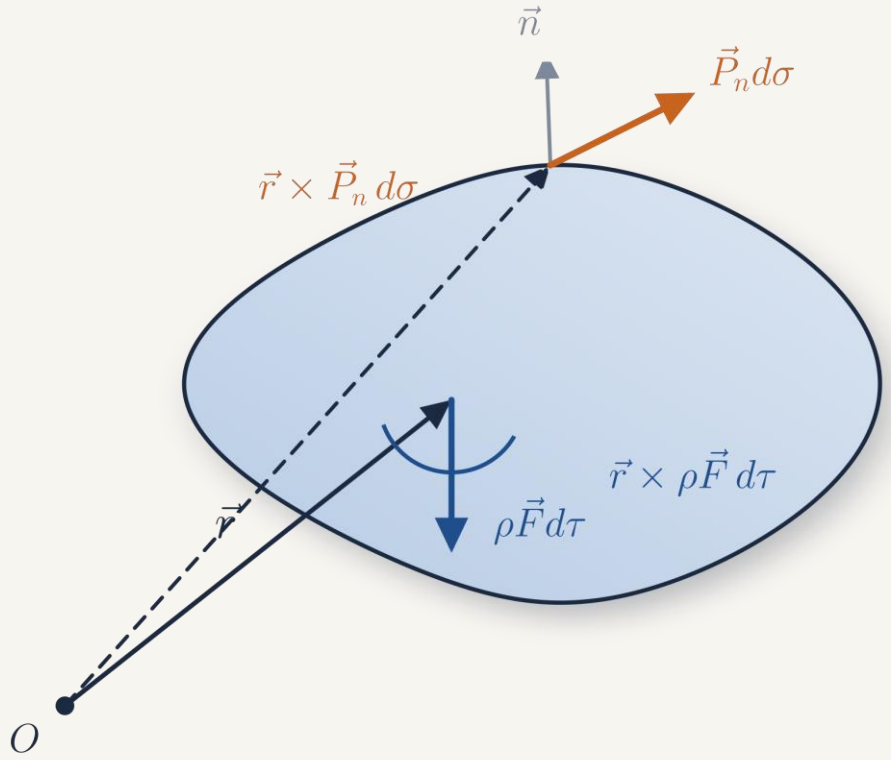
Уравнение момента количества движения

Обобщим уравнение моментов системы на среду, занимающую объём τ с поверхностью σ:

$$\frac{d}{dt}\int_\tau \vec{r}\times\rho\vec{v}\,d\tau = \int_\tau \vec{r}\times\rho\vec{F}\,d\tau + \int_\sigma \vec{r}\times\vec{P}_n\,d\sigma \qquad (10.5)$$

Индивидуальная производная по времени от момента количества движения объёма τ относительно центра *O* (связанного с инерциальной системой отсчёта) равна сумме моментов внешних массовых и поверхностных сил.

Предполагается, что внутренних моментов и распределённых пар нет — **классический случай**.



Моменты массовой и поверхностной сил относительно центра O

Преобразование уравнения моментов

По формуле Гаусса — Остроградского уравнение (10.5) для непрерывного движения:

$$\int_\tau \vec{r}\times\rho\frac{d\vec{v}}{dt}\,d\tau=\int_\tau \vec{r}\times\rho\vec{F}\,d\tau+\int_\tau \nabla_i\left(\vec{r}\times\vec{P}^{\,i}\right)d\tau$$

Ковариантная производная векторного произведения:

$$\nabla_i\left(\vec{r}\times\vec{P}^{\,i}\right)=\nabla_i\vec{r}\times\vec{P}^{\,i}+\vec{r}\times\nabla_i\vec{P}^{\,i}$$

Тогда сумма двух интегралов:

$$\int_\tau \vec{r}\times\left[\rho\left(\vec{F}-\frac{d\vec{v}}{dt}\right)+\nabla_i\vec{P}^{\,i}\right]d\tau+\int_\tau \nabla_i\vec{r}\times\vec{P}^{\,i}\,d\tau=0$$

Первый интеграл равен нулю в силу уравнения движения (10.2), поэтому из произвольности τ:

$$\nabla_i\vec{r}\times\vec{P}^{\,i}=0 \qquad (10.6)$$

Итог

Уравнение моментов в классическом случае сводится к условию (10.6).

Симметрия тензора напряжений

Так как

$$\nabla_i \vec{r} = \frac{\partial \vec{r}}{\partial x^i} = \vec{\mathfrak{e}}_i, \qquad \vec{P}^{\,i} = P^{ij}\,\vec{\mathfrak{e}}_j$$

уравнение (10.6) принимает вид

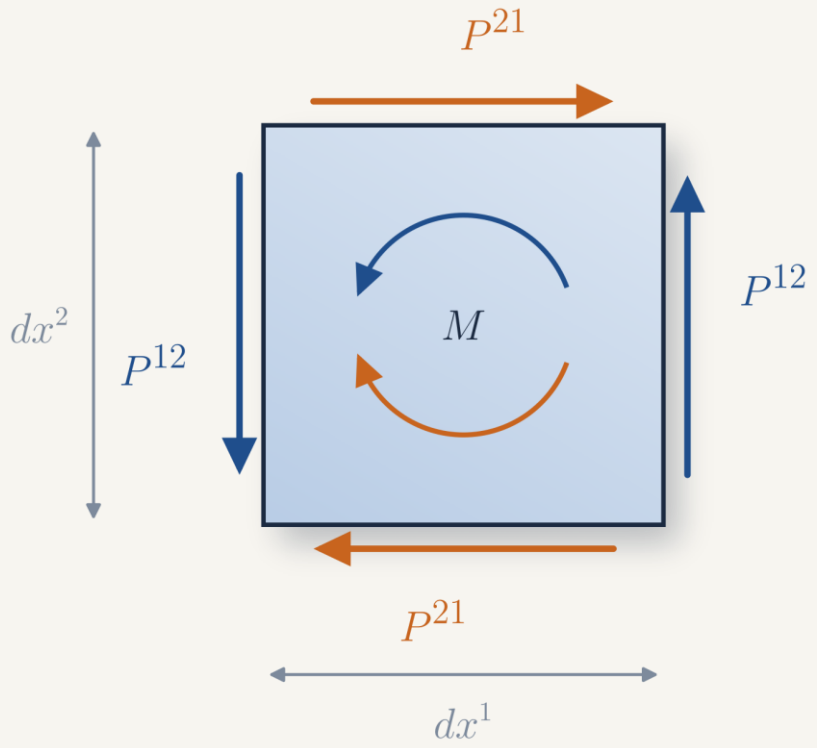
$$\left(\vec{\mathfrak{e}}_i \times \vec{\mathfrak{e}}_j\right) P^{ij} = 0$$

Группируя слагаемые с перестановкой индексов:

$$\left(\vec{\mathfrak{e}}_i \times \vec{\mathfrak{e}}_j\right) P^{ij} + \left(\vec{\mathfrak{e}}_j \times \vec{\mathfrak{e}}_i\right) P^{ji} = \left(\vec{\mathfrak{e}}_i \times \vec{\mathfrak{e}}_j\right)\left(P^{ij} - P^{ji}\right) = 0$$

Отсюда **тензор напряжений симметричен**:

$$P^{ij} = P^{ji}$$



Закон парности касательных напряжений: моменты пар P^{12} и P^{21} уравновешиваются

Заключение и вопросы для самоконтроля

Выводы

1. Уравнение количества движения: $d/dt \int \rho v d\tau = \int \rho F d\tau + \int P_n d\sigma$ (10.1).
2. Для непрерывных движений — основное уравнение динамики в напряжениях $\rho\, dv/dt = \rho F + \nabla_i P^i$ (10.2).
3. При равновесии: $\rho F^i + \nabla_j P^{ij} = 0$ (10.4); пример — гидростатика $p = p_0 + \rho g h$.
4. Уравнение моментов (10.5) в классическом случае сводится к $\nabla_i r \times P^i = 0$.
5. Следствие уравнения моментов — симметрия тензора напряжений $P^{ij} = P^{ji}$.

Контрольные вопросы

1. Запишите уравнение количества движения сплошной среды в интегральной форме.
2. Как с помощью формулы Гаусса — Остроградского получить дифференциальную форму (10.2)?
3. Запишите уравнения (10.3) в декартовых координатах и поясните смысл каждого слагаемого.
4. Как выглядят уравнения равновесия? Получите из них закон гидростатики.
5. Сформулируйте уравнение момента количества движения (10.5).
6. Почему первый интеграл в преобразованном уравнении моментов равен нулю?
7. Докажите симметрию тензора напряжений. Что такое закон парности касательных напряжений?