**Казахский национальный университет имени аль-Фараби**

**Факультет механико-математический**

**Кафедра механики**

Образовательная программа «6B05403 – Механика»

## Дисциплина: Введение в механику сплошной среды

# Лекция № 4

## Тензор деформаций

**Преподаватель: Туралина Динара Елеусизовна**

к.ф.-м.н., ассистент-профессор

**Алматы, 2026 год**

# Два состояния деформируемого тела

Рассмотрим два положения деформируемого тела и его частицы *M*: в **начальный** момент и в момент *t*. В сопутствующей системе координаты частицы $\xi^i$ одинаковы, а векторы базиса — разные.

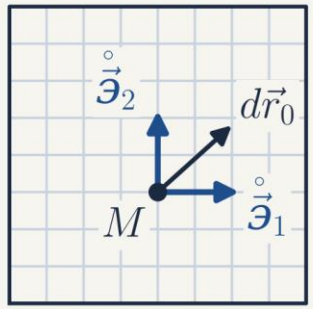
Элемент *d***r** в момент *t* (базис $\hat{\vec{e}}_i$):

$$d\vec{r} = d\xi^1 \hat{\vec{e}}_1 + d\xi^2 \hat{\vec{e}}_2 + d\xi^3 \hat{\vec{e}}_3 = d\xi^i \, \hat{\vec{e}}_i$$

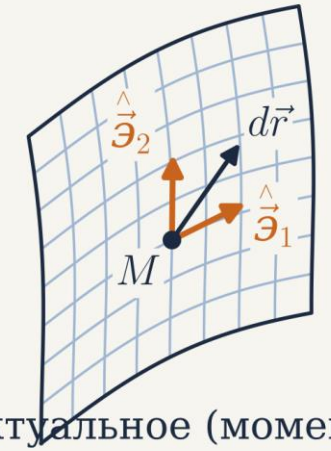
тот же элемент в начальном состоянии (базис $\mathring{\vec{e}}_i$):

$$d\vec{r}_0 = d\xi^1 \mathring{\vec{e}}_1 + d\xi^2 \mathring{\vec{e}}_2 + d\xi^3 \mathring{\vec{e}}_3 = d\xi^i \, \mathring{\vec{e}}_i$$

**Координаты частиц одинаковы — компоненты метрических тензоров разные.**




начальное состояние: $\mathring{g}_{ij}$




актуальное (момент $t$): $\hat{g}_{ij}$

Вмороженная сетка $\xi^i$ в начальном состоянии и в момент t; $d\mathbf{r}_0$ переходит в $d\mathbf{r}$

# Метрика начального и актуального состояний

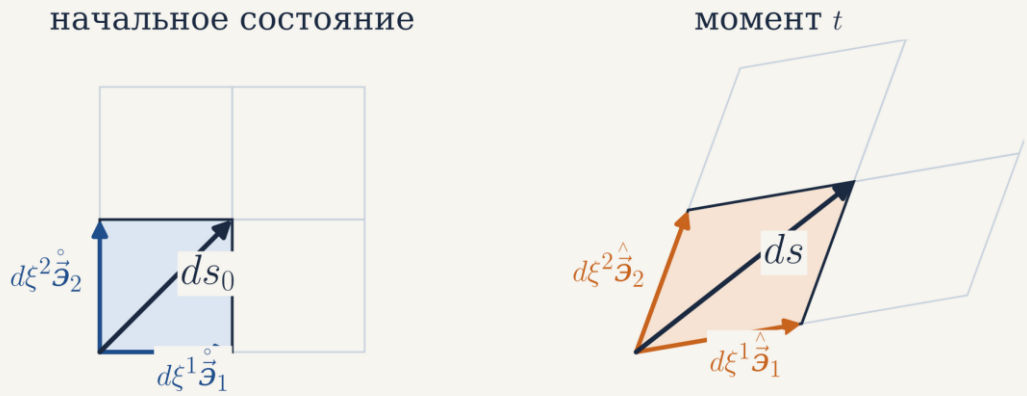
Длина элемента в момент *t*:

$$|d\vec{r}| = ds, \qquad ds^2 = \hat{g}_{ij}\, d\xi^i d\xi^j, \qquad \hat{g}_{ij} = \hat{\vec{\mathfrak{e}}}_i \cdot \hat{\vec{\mathfrak{e}}}_j \tag{4.1}$$

Длина того же элемента в начальном состоянии:

$$|d\vec{r}_0| = ds_0, \qquad ds_0^2 = \mathring{g}_{ij}\, d\xi^i d\xi^j, \qquad \mathring{g}_{ij} = \mathring{\vec{\mathfrak{e}}}_i \cdot \mathring{\vec{\mathfrak{e}}}_j \tag{4.2}$$

Компоненты $\hat{g}_{ij}$ и $\mathring{g}_{ij}$ вычисляются для **одной и той же частицы** и при **одинаковых** $d\xi^i$. Их различие и описывает деформацию в окрестности частицы.



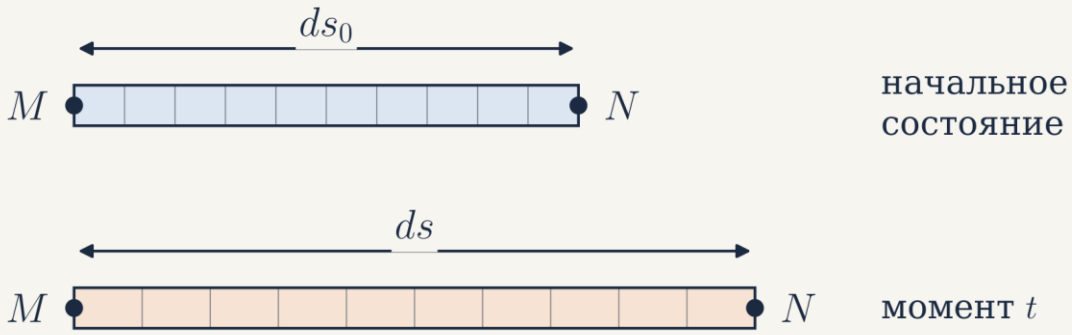

Одни и те же приращения $d\xi^1$, $d\xi^2$ дают разные длины $ds_0$ и $ds$, так как различаются базисы

# Коэффициент относительного удлинения

Изменение длины материального волокна характеризуют **коэффициентом относительного удлинения**:

$$\ell = \frac{ds - ds_0}{ds_0} = \frac{ds}{ds_0} - 1 \qquad (4.3)$$

Удлинение зависит от направления волокна: в одной точке разные волокна растягиваются по-разному. Чтобы описать деформацию полностью, нужен тензор.




Материальное волокно MN длиной $ds_0$ в момент t имеет длину ds

**$\ell > 0$**

растяжение волокна

**$\ell < 0$**

сжатие волокна

**$\ell = 0$**

длина не изменилась

# Тензор деформаций

Деформацию в окрестности каждой частицы можно полностью описать тензором второго ранга:

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2}\left(\hat{g}_{ij} - \mathring{g}_{ij}\right) \tag{4.4}$$

Деформация связана с изменением расстояний между частицами, поэтому за её меру принимают разность квадратов длин:

$$ds^2 - ds_0^2 = 2\,\varepsilon_{ij}\,d\xi^i d\xi^j \tag{4.5}$$

Слева — инвариант, справа — свёртка $\varepsilon_{ij}$ с произвольным тензором $d\xi^i d\xi^j$, поэтому $\varepsilon_{ij}$ — **тензор деформаций**.

**Структура тензора $\varepsilon_{ij}$**

| | | |
|---|---|---|
| $\varepsilon_{11}$ | $\varepsilon_{12}$ | $\varepsilon_{13}$ |
| $\varepsilon_{21}$ | $\varepsilon_{22}$ | $\varepsilon_{23}$ |
| $\varepsilon_{31}$ | $\varepsilon_{32}$ | $\varepsilon_{33}$ |

- **Диагональные** компоненты — удлинения волокон
- **Недиагональные** — сдвиги (изменение углов)
- $\varepsilon_{ij} = \varepsilon_{ji}$: 6 независимых компонент

# Метрика через длины и углы базисных векторов

$$\hat{g}_{ij} = \hat{\vec{\mathfrak{e}}}_i \cdot \hat{\vec{\mathfrak{e}}}_j = |\hat{\vec{\mathfrak{e}}}_i|\,|\hat{\vec{\mathfrak{e}}}_j| \cos\psi_{ij} \tag{4.6}$$

$\psi_{ij}$ — углы между векторами $\hat{\mathfrak{e}}_i$ и $\hat{\mathfrak{e}}_j$;

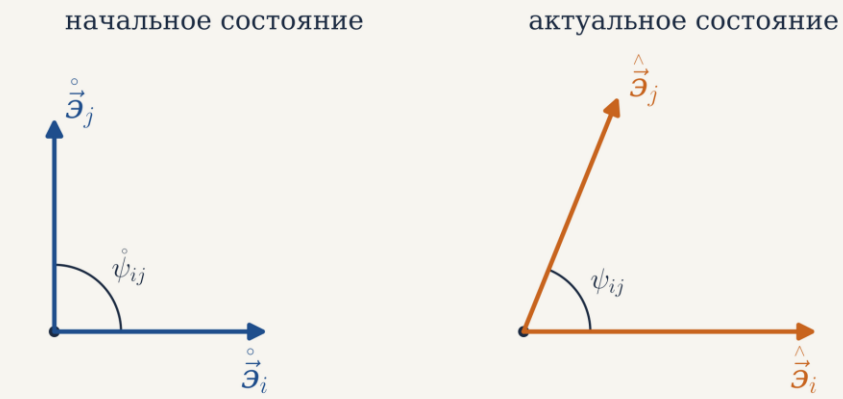
$$\mathring{g}_{ij} = \mathring{\vec{\mathfrak{e}}}_i \cdot \mathring{\vec{\mathfrak{e}}}_j = |\mathring{\vec{\mathfrak{e}}}_i|\,|\mathring{\vec{\mathfrak{e}}}_j| \cos\mathring{\psi}_{ij} \tag{4.7}$$

$\mathring{\psi}_{ij}$ — углы между векторами $\mathring{\mathfrak{e}}_i$ и $\mathring{\mathfrak{e}}_j$. Отношение длин базисных векторов:

$$\frac{|\hat{\vec{\mathfrak{e}}}_i|}{|\mathring{\vec{\mathfrak{e}}}_i|} = \frac{|\partial\vec{r}/\partial\xi^i|}{|\partial\vec{r}_0/\partial\xi^i|} = \frac{ds_i}{ds_{0i}} = 1 + \ell_i$$

$ds_i$, $ds_{0i}$ — элементы дуг координатных линий $\xi^i$, $\ell_i$ — удлинения в направлениях $\xi^i$. Тогда

$$\hat{g}_{ij} = |\mathring{\vec{\mathfrak{e}}}_i|\,|\mathring{\vec{\mathfrak{e}}}_j|\,(1+\ell_i)(1+\ell_j)\cos\psi_{ij}$$




Длины базисных векторов растут в $(1 + \ell_i)$ раз, угол $\mathring{\psi}_{ij}$ переходит в $\psi_{ij}$

# Формула для геометрического истолкования $\varepsilon_{ij}$

Приняв за начальное состояние среды метрику $\mathring{g}_{ij}$ и подставив (4.6), (4.7) в (4.4), получаем:

$$2\varepsilon_{ij} = \left[(1+\ell_i)(1+\ell_j)\cos\psi_{ij} - \cos\mathring{\psi}_{ij}\right] |\mathring{\vec{\ni}}_i|\,|\mathring{\vec{\ni}}_j| \tag{4.8}$$

### Удлинения

Множители $(1 + \ell_i)$ показывают, во сколько раз удлинились волокна вдоль осей $\xi^i$.

### Изменение углов

Разность $\cos\psi_{ij} - \cos\mathring{\psi}_{ij}$ описывает поворот осей друг относительно друга.

### Вывод

Компоненты $\varepsilon_{ij}$ полностью определяются удлинениями и изменением углов между волокнами.

# Смысл диагональных компонент: удлинения

При i = j из (4.8) (без суммирования по i):

$$2\varepsilon_{ii} = \left[(1+\ell_i)^2 - 1\right] \mathring{g}_{ii}$$

откуда коэффициент удлинения вдоль оси $\xi^i$:

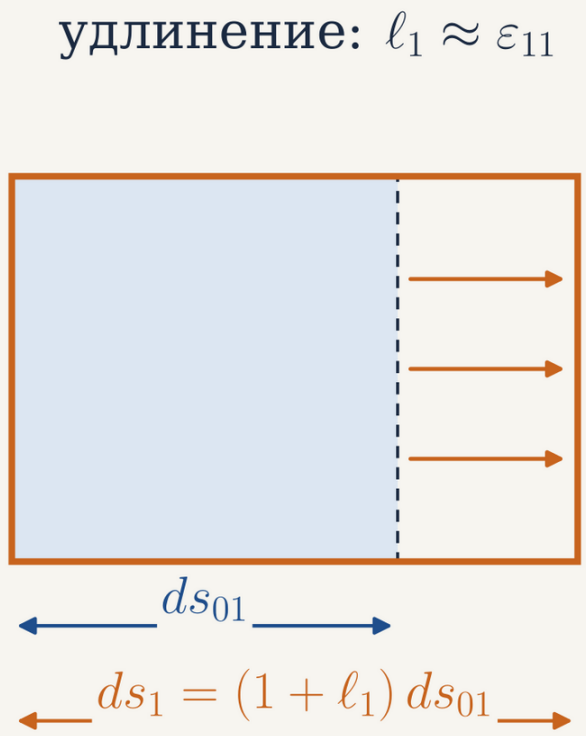
$$\ell_i = \sqrt{1 + \frac{2\varepsilon_{ii}}{\mathring{g}_{ii}}} - 1 \qquad (4.9)$$

При малых деформациях — разложение в ряд:

$$\ell_i \approx \frac{\varepsilon_{ii}}{\mathring{g}_{ii}}$$

Если начальная система декартова, то $\mathring{g}_{ii} = 1$:

$$\ell_i = \varepsilon_{ii} \qquad (\mathring{g}_{ii} = 1) \qquad (4.10)$$




Растяжение вдоль оси $x^1$: $ds_1 = (1 + \ell_1)\, ds_{01}$, при малых деформациях $\ell_1 = \varepsilon_{11}$

# Смысл недиагональных компонент: сдвиги

Выберем в начальном состоянии ортогональные оси и обозначим через $\chi_{ij}$ изменение прямого угла:

$$\mathring{\psi}_{ij} = \frac{\pi}{2}, \qquad \psi_{ij} = \frac{\pi}{2} - \chi_{ij}$$

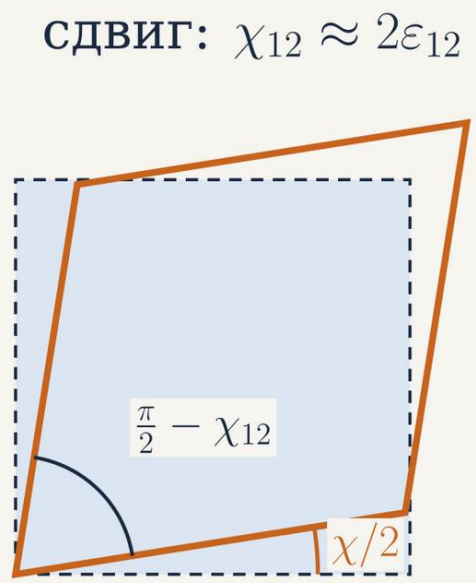
Из (4.8), (4.7) и (4.4) получаем

$$2\varepsilon_{ij} = |\hat{\vec{\mathfrak{e}}}_i|\,|\hat{\vec{\mathfrak{e}}}_j| \sin\chi_{ij}$$

$$\sin\chi_{ij} = \frac{2\varepsilon_{ij}}{\sqrt{\hat{g}_{ii}}\sqrt{\hat{g}_{jj}}} \tag{4.11}$$

При малых деформациях ($\mathring{g}_{ii} = 1$, $\hat{g}_{ii} = 1 + O(\varepsilon)$):

$$\chi_{ij} \approx \sin\chi_{ij} \approx 2\varepsilon_{ij} \tag{4.12}$$




Угол между волокнами, бывший прямым, уменьшается на $\chi_{12} \approx 2\varepsilon_{12}$

# Пример: простой сдвиг

Закон движения (начальная система декартова):

$$x^1 = \xi^1 + \gamma\,\xi^2, \qquad x^2 = \xi^2, \qquad x^3 = \xi^3$$

Метрика актуального состояния $\hat{g}_{ij} = \partial x^k/\partial\xi^i \cdot \partial x^k/\partial\xi^j$:

$$\hat{g}_{11} = 1, \quad \hat{g}_{12} = \gamma, \quad \hat{g}_{22} = 1 + \gamma^2, \quad \mathring{g}_{ij} = \delta_{ij}$$

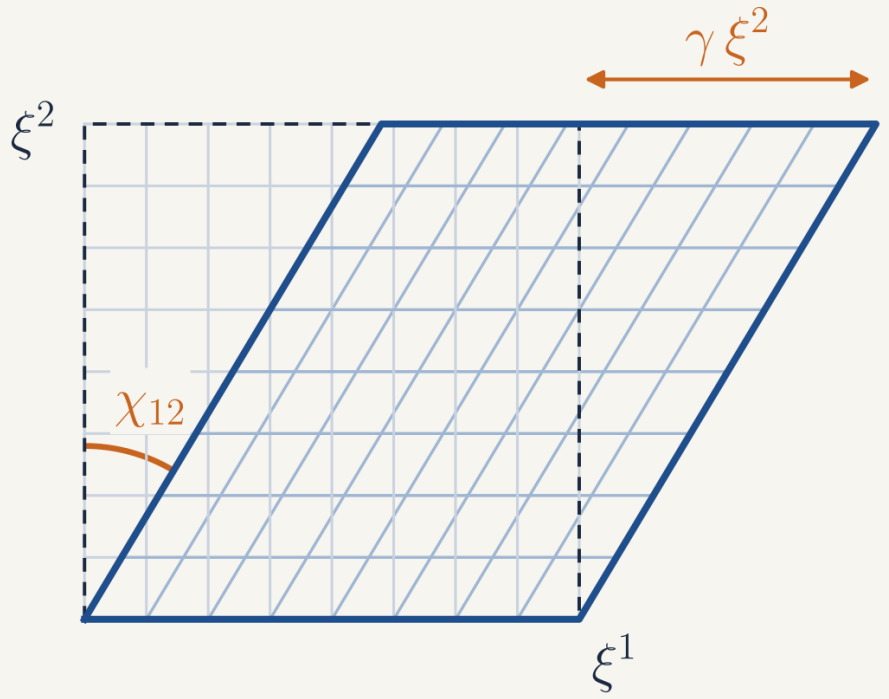
Компоненты тензора деформаций по (4.4):

$$\varepsilon_{11} = 0, \qquad \varepsilon_{12} = \frac{\gamma}{2}, \qquad \varepsilon_{22} = \frac{\gamma^2}{2}$$

По (4.11) и (4.9):

$$\sin\chi_{12} = \frac{\gamma}{\sqrt{1+\gamma^2}} \;\Rightarrow\; \operatorname{tg}\chi_{12} = \gamma, \qquad \ell_2 = \sqrt{1+\gamma^2} - 1$$

При малых γ: $\chi_{12} \approx \gamma = 2\varepsilon_{12}$, а $\ell_2 \approx \gamma^2/2$ — величина второго порядка.




Простой сдвиг: прямой угол скашивается на $\chi_{12}$, $\operatorname{tg}\chi_{12} = \gamma$

# Тензор малых деформаций: итоговая структура

При малых деформациях в декартовой системе начального состояния матрица тензора деформаций собирается из удлинений и углов сдвига:

$$\varepsilon_{ij} \approx \begin{pmatrix} \ell_1 & \frac{1}{2}\chi_{12} & \frac{1}{2}\chi_{13} \\ \frac{1}{2}\chi_{12} & \ell_2 & \frac{1}{2}\chi_{23} \\ \frac{1}{2}\chi_{13} & \frac{1}{2}\chi_{23} & \ell_3 \end{pmatrix}$$

**$\ell_i = \varepsilon_{ii}$**

относительное удлинение волокна вдоль оси $x^i$

**$\chi_{ij} = 2\varepsilon_{ij}$**

уменьшение прямого угла между осями $x^i$ и $x^j$

**$\theta \approx \varepsilon_{11}+\varepsilon_{22}+\varepsilon_{33}$**

относительное изменение объёма (лекция 6)

# Заключение и вопросы для самоконтроля

## Выводы

1. Деформация описывается сравнением метрик $\hat{g}_{ij}$ и $\mathring{g}_{ij}$ двух состояний при одних и тех же координатах $\xi^i$.
2. Изменение длины волокна характеризует коэффициент удлинения $\ell = (ds - ds_o)/ds_o$.
3. Тензор деформаций $\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2}(\hat{g}_{ij} - \mathring{g}_{ij})$ симметричен и имеет 6 независимых компонент.
4. Диагональные компоненты связаны с удлинениями: при малых деформациях $\varepsilon_{ii} = \ell_i$.
5. Недиагональные компоненты описывают сдвиги: $\chi_{ij} \approx 2\varepsilon_{ij}$.

## Контрольные вопросы

1. Чем отличаются метрические тензоры $\hat{g}_{ij}$ и $\mathring{g}_{ij}$? Почему координаты частиц в них одинаковы?
2. Дайте определение коэффициента относительного удлинения.
3. Как вводится тензор деформаций? Почему $\varepsilon_{ij}$ — тензор?
4. Каков геометрический смысл компонент $\varepsilon_{ij}$ с одинаковыми индексами?
5. Каков смысл компонент $\varepsilon_{ij}$ с различными индексами?
6. Как упрощаются формулы (4.9) и (4.11) при малых деформациях?
7. Найдите компоненты $\varepsilon_{ij}$ для простого сдвига $x^1 = \xi^1 + \gamma\xi^2$.