Казахский национальный университет имени аль-Фараби

Факультет механико-математический

Кафедра механики

Образовательная программа «6B05403 – Механика»

Дисциплина: Введение в механику сплошной среды

Лекция № 2

Предмет механики сплошной среды. Основные понятия и уравнения кинематики сплошной среды

Преподаватель: Туралина Динара Елеусизовна

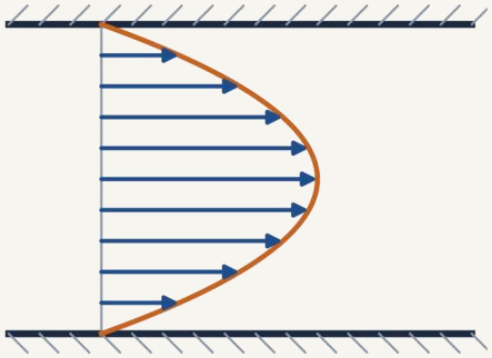
к.ф.-м.н., ассистент-профессор

Алматы, 2026 год

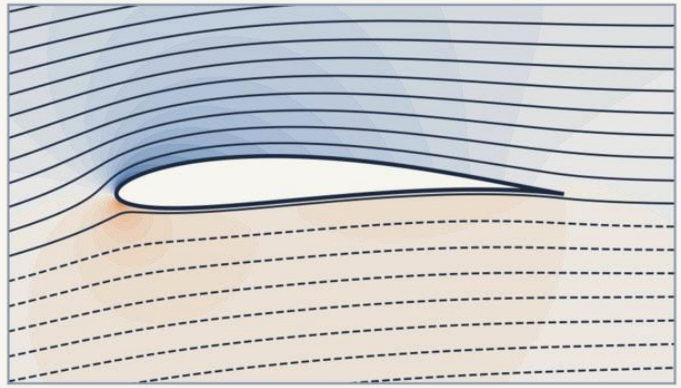
Предмет механики сплошной среды

Механика сплошной среды (МСС) — обширная часть механики, изучающая движение жидких, газообразных и твёрдых деформируемых тел, которые заполняют пространство **непрерывно** и расстояния между точками которых **меняются** во время движения.

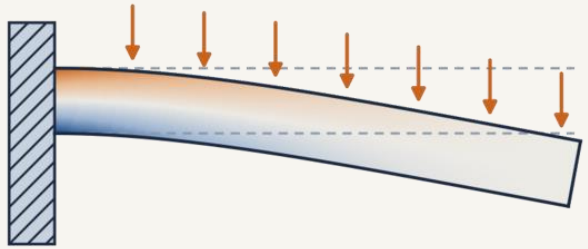
вязкая жидкость в канале



обтекание крыла (газ)



упругая балка (твёрдое тело)



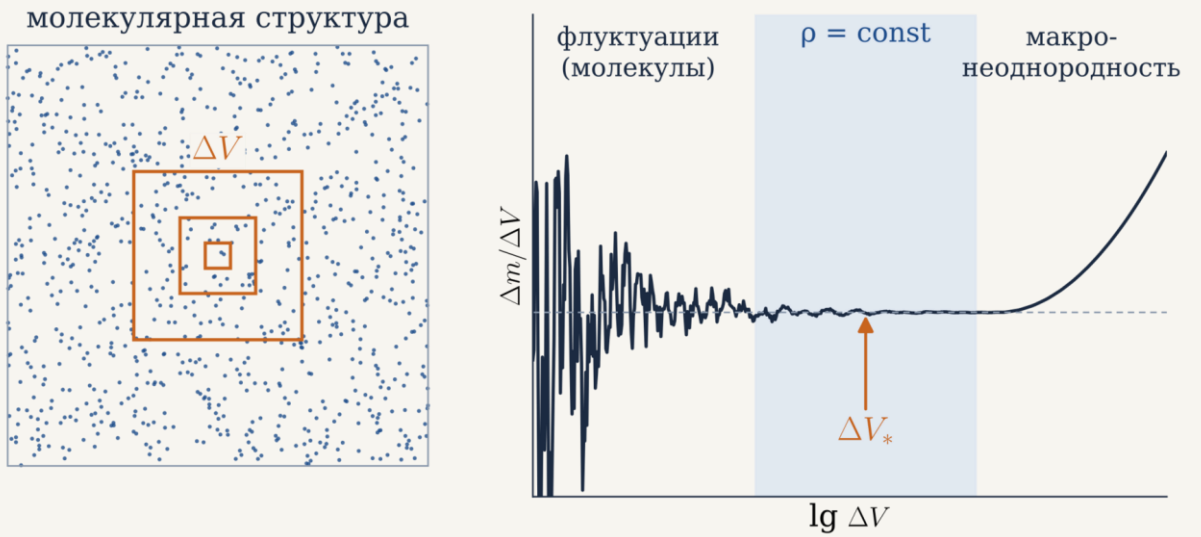
Гидромеханика · Газовая динамика · Аэродинамика · Теория упругости · Теория вязкоупругости · Теория пластичности

Гипотеза сплошности

Вещество состоит из молекул, но в МСС его заменяют **непрерывной средой**: масса и все характеристики распределены в пространстве непрерывно.

Плотность в точке определяют по **физически бесконечно малому объёму** ΔV∗ — малому по сравнению с телом, но содержащему огромное число молекул:

$$\rho = \lim_{\Delta V \to \Delta V_*} \frac{\Delta m}{\Delta V}$$



Средняя плотность Δm/ΔV: при малых ΔV — молекулярные флуктуации, на плато — плотность ρ сплошной среды

Условие применимости — малое **число Кнудсена** (λ — длина свободного пробега, *L* — размер задачи):

$$\mathrm{Kn} = \frac{\lambda}{L} \ll 1$$

Теоретическая механика и механика сплошной среды

МСС использует методы и данные теоретической механики, но учитывает главное отличие — **деформацию** тела в процессе движения.

Признак	Абсолютно твёрдое тело	Сплошная среда
Расстояния между точками	не меняются	меняются при движении
Число степеней свободы	6	бесконечно много
Сопутствующая система	жёсткая прямоугольная декартова	подвижная, деформируемая, криволинейная
Описание движения	$x_0^i(t)$ и углы Эйлера $\varphi^i(t)$	закон движения $x^i = x^i(\xi^j, t)$
Аппарат	векторная алгебра	тензорный анализ, гипотеза сплошности

Движение абсолютно твёрдого тела

Движение а.т.т. рассматриваем относительно декартовой прямоугольной системы x^i с базисом $\mathbf{э}_i$ (i = 1, 2, 3).

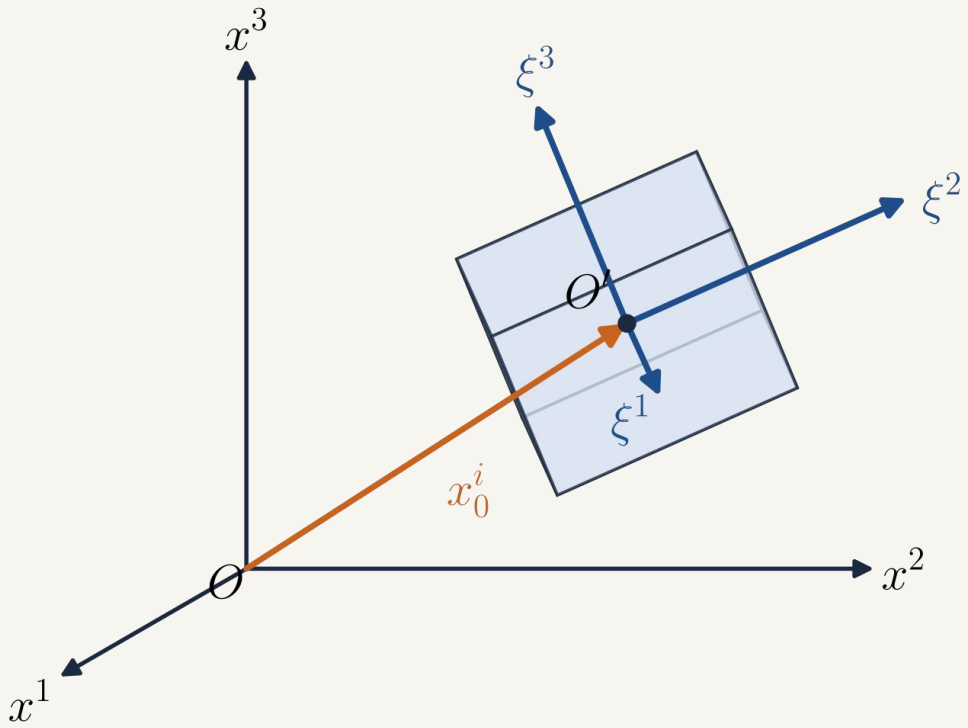
С телом связываем вспомогательную декартову систему ξ^k с базисом $\mathbf{э}^*_j$. Она движется вместе с телом и называется **сопутствующей**.

Положение тела фиксировано, если заданы:

3
координаты начала O' сопутствующей системы x_0^i

3
угла Эйлера φ^i — ориентация осей ξ^k относительно x^i

$$x_0^i(t), \quad \varphi^i(t), \qquad i = 1, 2, 3$$

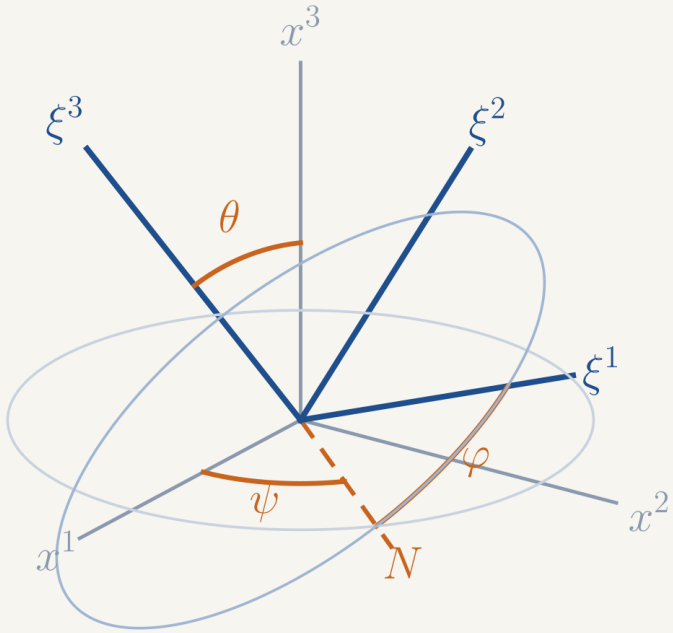


Неподвижная система x^i и сопутствующая система ξ^k, жёстко связанная с телом

Углы Эйлера и скорости точек твёрдого тела

Ориентацию сопутствующей системы задают три угла Эйлера (φ^1, φ^2, φ^3):

Угол	Название и ось поворота
ψ	угол прецессии — поворот вокруг оси x^3
θ	угол нутации — поворот вокруг линии узлов N
φ	угол собственного вращения — вокруг оси ξ^3



Скорость любой точки твёрдого тела — **формула Эйлера**:

$$\vec{v} = \vec{v}_0 + \vec{\omega} \times \vec{r}$$

$\mathbf{v}_0$ — скорость полюса O', $\boldsymbol{\omega}$ — угловая скорость тела. Расстояния между точками при таком движении сохраняются.

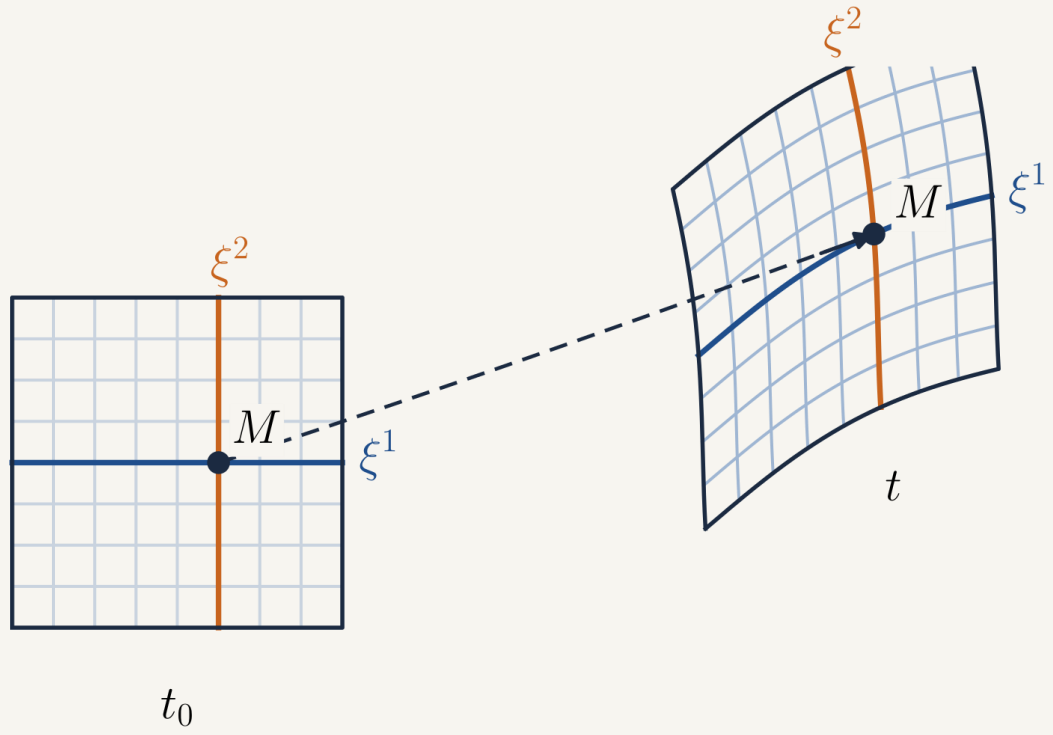
Сопутствующая система координат сплошной среды

Кинематика сплошной среды отличается от кинематики а.т.т.: сопутствующая система ξ^1, ξ^2, ξ^3 **«вморожена» в среду** и деформируется вместе с ней.

Это **подвижная деформируемая криволинейная** система координат в трёхмерном евклидовом пространстве.

Частица сохраняет свои координаты ξ^i во всё время движения — они служат её «именем». Обычно за ξ^i берут начальные координаты частицы:

$$\xi^i = x^i\big|_{t=t_0}$$



Координатные линии ξ^1, ξ^2 движутся и искривляются вместе с частицами; частица M сохраняет свои ξ^i

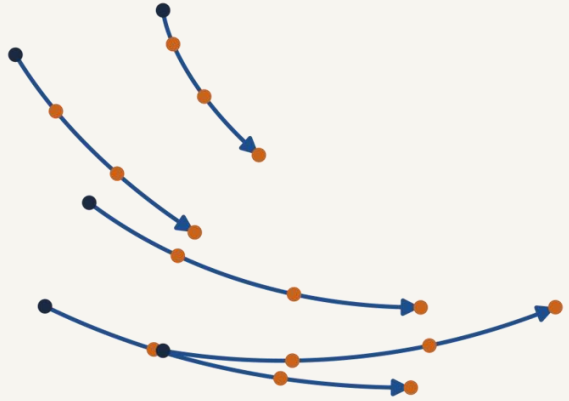
Закон движения сплошной среды

Рассмотрим частицу $M(\xi^i)$. С течением времени она меняет положение относительно системы отсчёта, поэтому её координаты x^i — функции времени. Уравнения

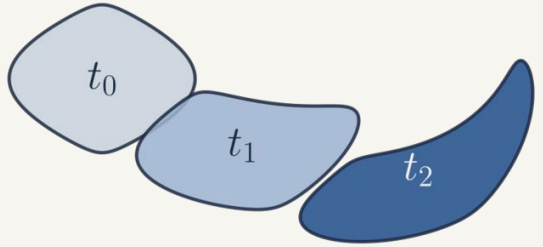
$$x^i = x^i\left(\xi^1, \xi^2, \xi^3, t\right) \quad \text{или} \quad x^i = x^i(\xi^j, t) \qquad (2.1)$$

называют **уравнениями движения** частицы сплошной среды (законом движения среды).

$\xi^k = \text{const}$: траектории частиц



$t = \text{const}$: конфигурации тела



Условия на закон движения

Относительно функций $x^i(\xi^j, t)$ предполагается, что они

- **непрерывны** вместе со своими производными по всем аргументам;
- **функционально независимы**.

Поэтому якобиан преобразования отличен от нуля при любом значении времени t:

$$J = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial x^1}{\partial \xi^1} & \dfrac{\partial x^1}{\partial \xi^2} & \dfrac{\partial x^1}{\partial \xi^3} \\ \dfrac{\partial x^2}{\partial \xi^1} & \dfrac{\partial x^2}{\partial \xi^2} & \dfrac{\partial x^2}{\partial \xi^3} \\ \dfrac{\partial x^3}{\partial \xi^1} & \dfrac{\partial x^3}{\partial \xi^2} & \dfrac{\partial x^3}{\partial \xi^3} \end{vmatrix} \neq 0 \qquad (2.2)$$

Следствия

Закон движения **обратим** — по положению точки можно найти, какая частица в ней находится:

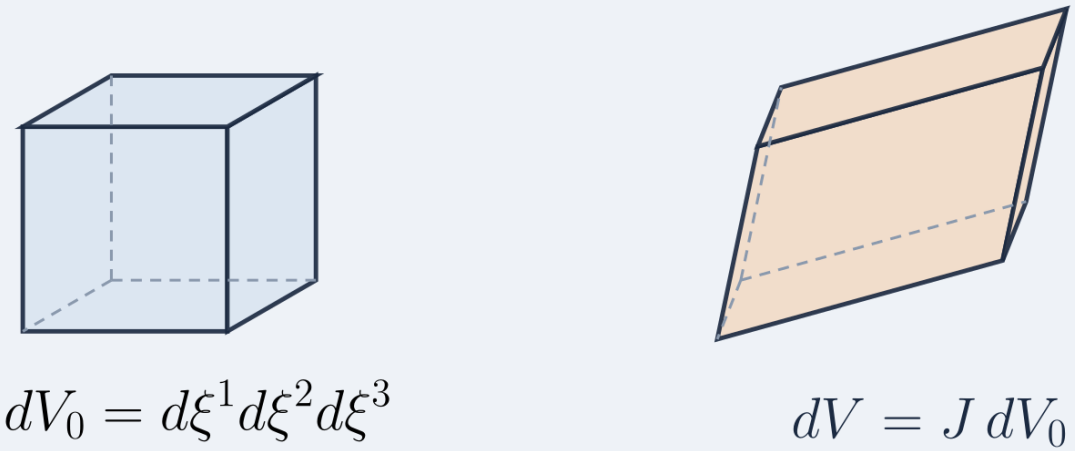
$$\xi^k = \xi^k(x^1, x^2, x^3, t)$$

Разные частицы не попадают в одну точку, а одна частица не «расщепляется».

При $t = t_0$ имеем $J = 1$, поэтому по непрерывности **$J > 0$** во всё время движения.

Геометрический смысл якобиана

$$x^i = x^i(\xi^k, t)$$



$$dV_0 = d\xi^1 d\xi^2 d\xi^3$$

$$dV = J\, dV_0$$

Якобиан — коэффициент изменения элементарного объёма частицы:

$$dV = J\, dV_0$$

Значение	Смысл
J > 1	объём частицы растёт (расширение)
J < 1	объём уменьшается (сжатие)
J = 1	объём сохраняется (изохорное движение)
J = 0	недопустимо: объём стянулся в точку

Из сохранения массы $\rho\, dV = \rho_0\, dV_0$ следует $\rho J = \rho_0$.

Примеры законов движения

Простой сдвиг

$$x^1 = \xi^1 + \gamma t\, \xi^2, \quad x^2 = \xi^2, \quad x^3 = \xi^3$$

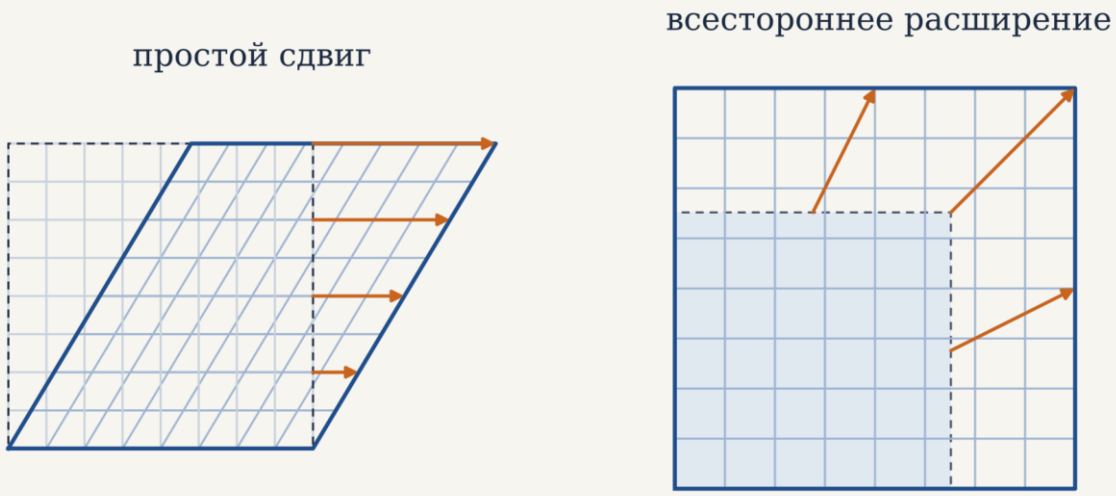
$$J = \begin{vmatrix} 1 & \gamma t & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 1$$

Слои скользят друг по другу, объём частиц сохраняется.

Всестороннее расширение

$$x^i = (1 + \alpha t)\, \xi^i \quad \Rightarrow \quad J = (1 + \alpha t)^3$$

Объём каждой частицы растёт в $(1 + \alpha t)^3$ раз.



Пунктир — начальное положение, синий контур — положение в момент t

Заключение и вопросы для самоконтроля

Выводы

1. МСС изучает движение жидкостей, газов и деформируемых твёрдых тел на основе гипотезы сплошности.
2. Положение а.т.т. задаётся шестью параметрами — $x_0{}^i$ и углами Эйлера; сплошная среда имеет бесконечно много степеней свободы.
3. Сопутствующая система ξ^i вморожена в среду и деформируется вместе с ней; ξ^i — «имя» частицы.
4. Движение среды описывается законом движения $x^i = x^i(\xi^j, t)$.
5. Условие $J \neq 0$ обеспечивает обратимость закона движения; J — коэффициент изменения объёма.

Контрольные вопросы

1. Что изучает механика сплошной среды? Назовите её основные разделы.
2. В чём состоит гипотеза сплошности и когда она применима?
3. Сколькими параметрами определяется положение абсолютно твёрдого тела? Какими?
4. Что называют сопутствующей системой координат? Чем она отличается у а.т.т. и сплошной среды?
5. Запишите уравнения движения частицы сплошной среды и поясните смысл переменных.
6. Какие требования накладываются на функции $x^i(\xi^j, t)$? Каков смысл условия $J \neq 0$?
7. Чему равен якобиан при простом сдвиге? Что это означает физически?