Казахский национальный университет имени аль-Фараби

Факультет механико-математический

Кафедра механики

Образовательная программа «6B05403 – Механика»

Дисциплина: Введение в механику сплошной среды

Лекция № 6

Главные оси и главные компоненты тензора деформаций

Преподаватель: Туралина Динара Елеусизовна

к.ф.-м.н., ассистент-профессор

Алматы, 2026 год

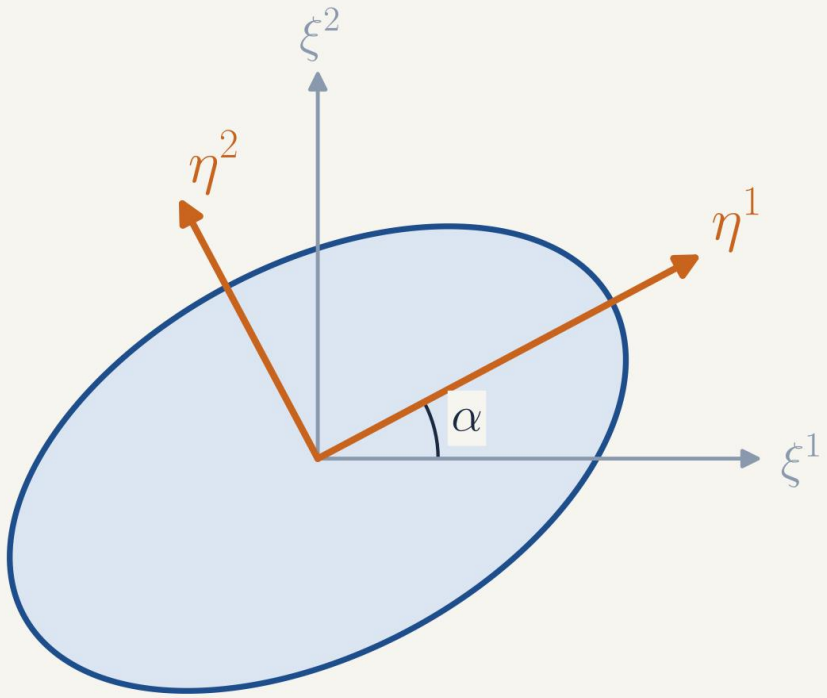
Квадратичная форма тензора деформаций

С каждым симметричным тензором, в том числе с ε_{ij}, связана квадратичная форма $\varepsilon_{ij}d\xi^i d\xi^j$.

В каждой точке можно найти такую **ортогональную** систему координат η^1, η^2, η^3, в которой форма принимает вид суммы квадратов:

$$\varepsilon_{ij}\, d\xi^i d\xi^j = \varepsilon_{11}\left(d\eta^1\right)^2 + \varepsilon_{22}\left(d\eta^2\right)^2 + \varepsilon_{33}\left(d\eta^3\right)^2$$

Преобразование $\xi^i \to \eta^i$ зависит от ε_{ij}, поэтому ортогональный триэдр η^i при движении, вообще говоря, в разные моменты времени разный.



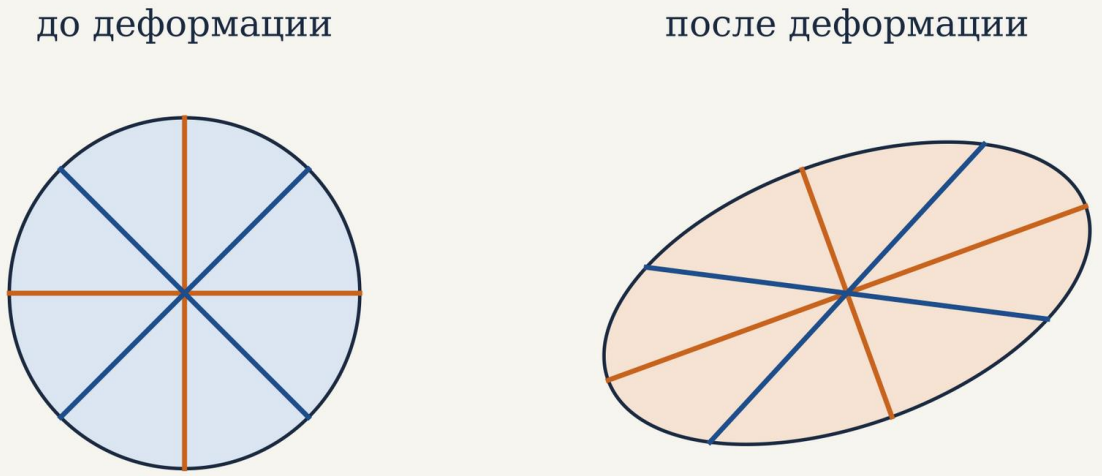
Эллипс $\varepsilon_{ij}d\xi^i d\xi^j$ = const и его главные оси η^1, η^2, повёрнутые на угол α

Главные оси тензора деформаций

Возьмём в пространстве начального состояния $\mathring{g}_{ij}$ ортогональные оси η^1, η^2, η^3.

Если в результате движения они перейдут в пространстве $\hat{g}_{ij}$ в такие направления, что векторы базиса $\hat{e}_i$ **тоже ортогональны**, то эти оси называются **главными осями тензора деформаций**.

Материальная окружность переходит в эллипс: волокна вдоль главных осей остаются перпендикулярными, остальные — скашиваются.



Оранжевые волокна (главные направления) остаются ортогональными, синие — скашиваются

Свойства главных осей

Для главных осей η^1, η^2, η^3 компоненты с разными индексами равны нулю, а углы скашивания отсутствуют:

$$\mathring{g}_{ij} = \hat{g}_{ij} = \varepsilon_{ij} = 0, \qquad \chi_{ij} = 0 \qquad (i \neq j)$$

Нет сдвигов

Углы между главными осями не скашиваются: $\chi_{ij} = 0$ при $i \neq j$.

Движение как твёрдого тела

Ортогональный триэдр главных осей перемещается поступательно и поворачивается.

Только удлинения

Элементы $d\mathbf{r}$ вдоль главных осей лишь растягиваются или сжимаются.

Главные компоненты тензоров $\hat{\varepsilon}$ и $\mathring{\varepsilon}$

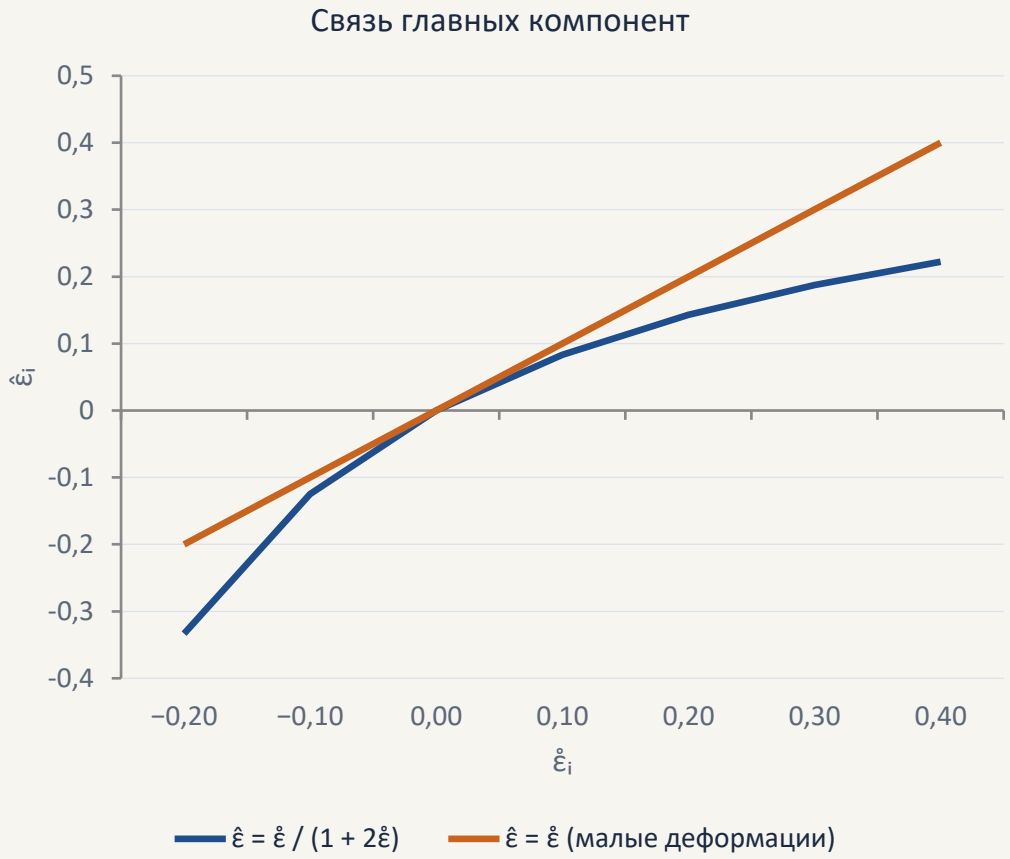
Компоненты $\hat{\varepsilon}_i$ и $\mathring{\varepsilon}_i$ в главных осях — **главные компоненты**. В общем случае $\hat{\varepsilon}_i \neq \mathring{\varepsilon}_i$, но между ними есть связь. Вдоль главных направлений:

$$ds_i^2 - ds_{0i}^2 = 2\hat{\varepsilon}_i\, ds_i^2 = 2\mathring{\varepsilon}_i\, ds_{0i}^2$$

Отсюда

$$2\hat{\varepsilon}_i = \frac{2\mathring{\varepsilon}_i}{1 + 2\mathring{\varepsilon}_i}$$

$$2\hat{\varepsilon}_i = 1 - \frac{ds_{0i}^2}{ds_i^2}$$



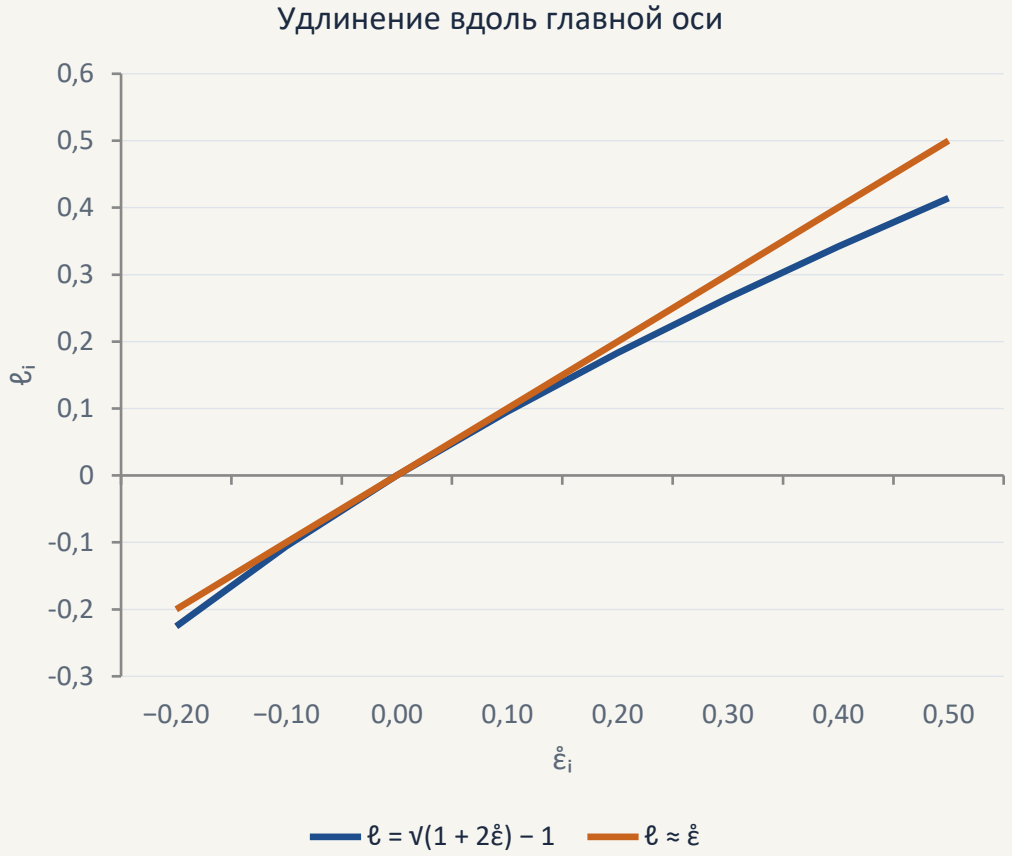
Коэффициент относительного удлинения

Из связи длин вдоль главных осей получаем выражение для коэффициента относительного удлинения:

$$\ell_i = \frac{1}{\sqrt{1-2\hat{\varepsilon}_i}} - 1 = \sqrt{1+2\mathring{\varepsilon}_i} - 1 \qquad (6.1)$$

При малых деформациях обе формулы дают $\ell_i \approx \hat{\varepsilon}_i \approx \mathring{\varepsilon}_i$.

Главные компоненты — это удлинения вдоль главных осей; при больших деформациях связь нелинейная.



Главные значения и инварианты

Главные компоненты ε_1, ε_2, ε_3 — корни характеристического уравнения:

$$\det\left\|\varepsilon_{ij} - \lambda\, g_{ij}\right\| = 0$$

$$\lambda^3 - J_1\lambda^2 + J_2\lambda - J_3 = 0$$

Его коэффициенты не зависят от выбора системы координат — это **инварианты** тензора деформаций:

$$J_1 = \varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3, \quad J_2 = \varepsilon_1\varepsilon_2 + \varepsilon_2\varepsilon_3 + \varepsilon_3\varepsilon_1, \quad J_3 = \varepsilon_1\varepsilon_2\varepsilon_3$$

J_1 — линейный инвариант (след тензора): объёмная деформация

J_2 — квадратичный инвариант

J_3 — кубический инвариант (определитель)

Коэффициент объёмного расширения

Коэффициентом объёмного расширения θ называют относительное изменение объёма:

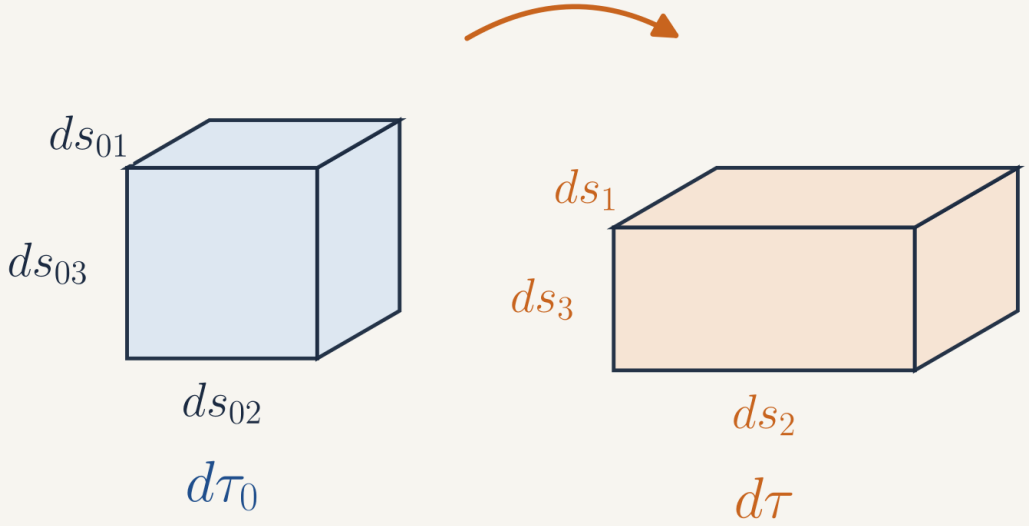
$$\theta = \frac{d\tau - d\tau_0}{d\tau_0}$$

Возьмём элементарный параллелепипед с рёбрами вдоль главных осей. Его рёбра остаются ортогональными, поэтому

$$d\tau_0 = ds_{01}\, ds_{02}\, ds_{03}, \qquad d\tau = ds_1\, ds_2\, ds_3$$

а их длины меняются так:

$$\frac{ds_i}{ds_{0i}} = \sqrt{1 + 2\mathring{\varepsilon}_i}$$



Куб с рёбрами вдоль главных осей переходит в прямоугольный параллелепипед

Формула для θ через главные компоненты

Так как $ds^2_i - ds^2_{0i} = 2\mathring{\varepsilon}_i ds^2_{0i}$, коэффициенту θ можно придать вид:

$$\theta = \sqrt{\left(1+2\mathring{\varepsilon}_1\right)\left(1+2\mathring{\varepsilon}_2\right)\left(1+2\mathring{\varepsilon}_3\right)} - 1 \qquad (6.2)$$

или через инварианты начального состояния:

$$\theta = \sqrt{1 + 2\mathring{J}_1 + 4\mathring{J}_2 + 8\mathring{J}_3} - 1$$

Инвариант

θ — инвариантная геометрическая характеристика: не зависит от выбора координат.

Точная формула

(6.2) справедлива при любых, в том числе больших, деформациях.

θ > 0 / θ < 0

Расширение или сжатие частицы; θ = 0 — объём сохраняется.

Малые деформации: θ ≈ J_1

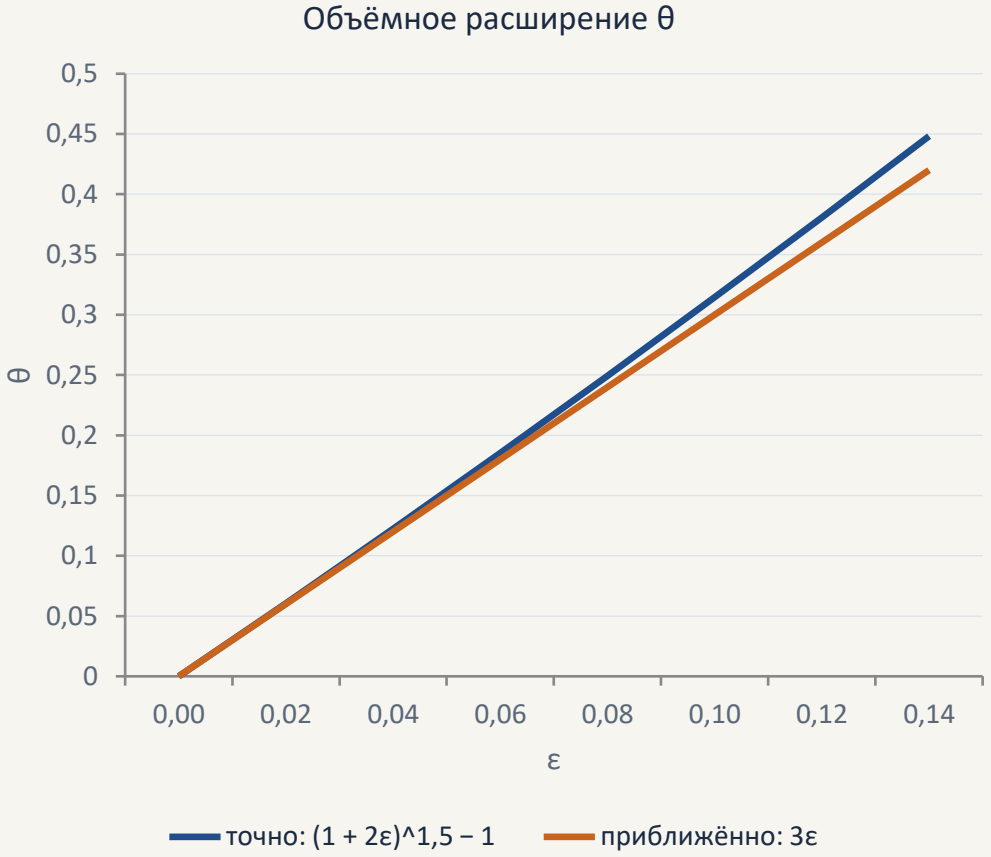
В случае бесконечно малых деформаций разложение (6.2) в ряд даёт:

$$\theta \approx J_1 = \hat{\varepsilon}_1 + \hat{\varepsilon}_2 + \hat{\varepsilon}_3 \approx \mathring{\varepsilon}_1 + \mathring{\varepsilon}_2 + \mathring{\varepsilon}_3 \qquad (6.3)$$

В декартовой системе это след тензора малых деформаций — дивергенция вектора перемещения:

$$\theta \approx \varepsilon_{11} + \varepsilon_{22} + \varepsilon_{33} = \operatorname{div} \vec{w}$$

При всестороннем растяжении $\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = \varepsilon_3 = \varepsilon$ точное $\theta = (1 + 2\varepsilon)^{3/2} - 1$, а приближённое $\theta \approx 3\varepsilon$.



Пример: главные деформации плоского состояния

Задан тензор малых деформаций в плоскости x^1x^2:

$$\varepsilon_{ij} = \begin{pmatrix} 0{,}03 & 0{,}01 \\ 0{,}01 & 0{,}01 \end{pmatrix}$$

Главные значения (корни уравнения 2-го порядка):

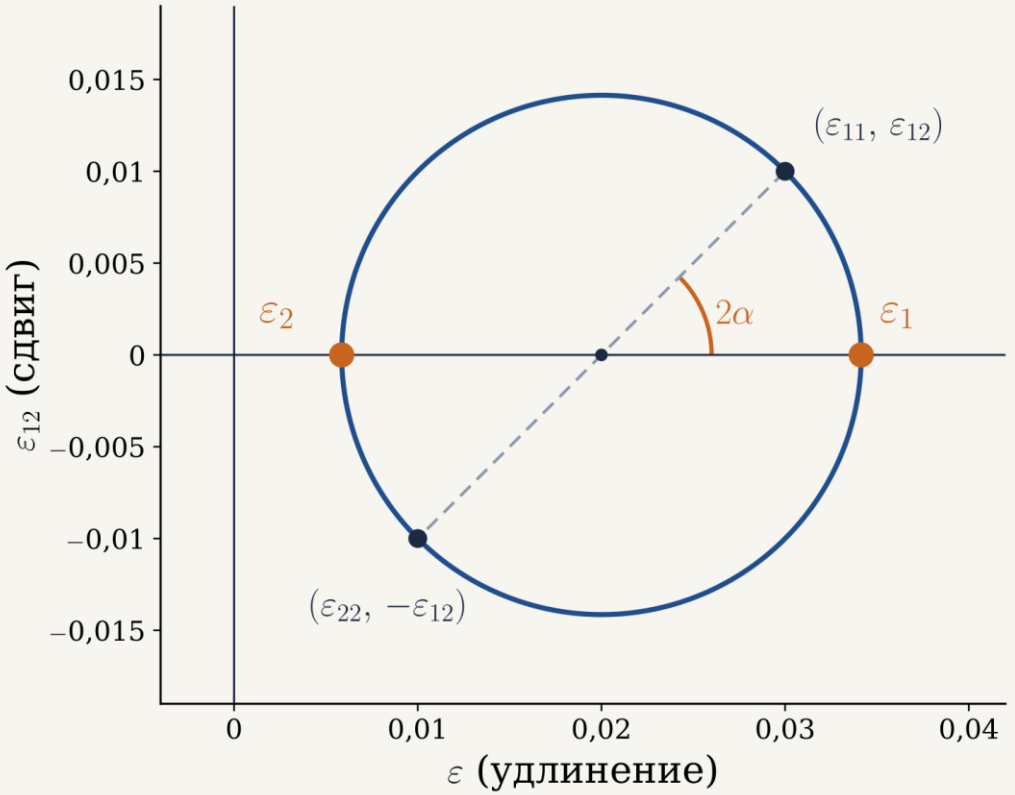
$$\varepsilon_{1,2} = \frac{\varepsilon_{11} + \varepsilon_{22}}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{\varepsilon_{11} - \varepsilon_{22}}{2}\right)^2 + \varepsilon_{12}^2}$$

$$\varepsilon_1 \approx 0{,}0341, \qquad \varepsilon_2 \approx 0{,}0059$$

Направление главной оси и объёмная деформация:

$$\operatorname{tg} 2\alpha = \frac{2\varepsilon_{12}}{\varepsilon_{11} - \varepsilon_{22}} = 1 \;\Rightarrow\; \alpha = 22{,}5^\circ$$

$$\theta \approx J_1 = \varepsilon_1 + \varepsilon_2 = 0{,}04$$



Круг Мора: центр $(\varepsilon_{11} + \varepsilon_{22})/2$, главные значения — точки пересечения с осью

Заключение и вопросы для самоконтроля

Выводы

1. В каждой точке существует ортогональный триэдр главных осей, в котором квадратичная форма $\varepsilon_{ij}d\xi^i d\xi^j$ — сумма квадратов.
2. В главных осях $\varepsilon_{ij} = 0$ при $i \neq j$: сдвигов нет, триэдр движется как твёрдое тело.
3. Главные компоненты $\hat{\varepsilon}_i$ и $\mathring{\varepsilon}_i$ связаны: $2\hat{\varepsilon}_i = 2\mathring{\varepsilon}_i/(1 + 2\mathring{\varepsilon}_i)$; удлинение $\ell_i = \sqrt{(1 + 2\mathring{\varepsilon}_i)} - 1$.
4. Коэффициент объёмного расширения $\theta = \sqrt{(1 + 2J_1 + 4J_2 + 8J_3)} - 1$.
5. При малых деформациях $\theta \approx J_1 = \varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3$.

Контрольные вопросы

1. Какие оси называются главными осями тензора деформаций?
2. Чему равны компоненты ε_{ij} ($i \neq j$) и углы χ_{ij} в главных осях?
3. Почему триэдр главных осей движется как абсолютно твёрдое тело?
4. Как связаны главные компоненты $\hat{\varepsilon}_i$ и $\mathring{\varepsilon}_i$?
5. Запишите формулу (6.1) для коэффициента относительного удлинения.
6. Что такое коэффициент объёмного расширения? Запишите формулу (6.2).
7. Как определяются инварианты J_1, J_2, J_3 и чему равно θ при малых деформациях?