Казахский национальный университет имени аль-Фараби

Факультет механико-математический

Кафедра механики

Образовательная программа «6B05403 – Механика»

Дисциплина: Введение в механику сплошной среды

Лекция № 7

Тензор скоростей деформаций. Теорема Коши – Гельмгольца

Преподаватель: Туралина Динара Елеусизовна

к.ф.-м.н., ассистент-профессор

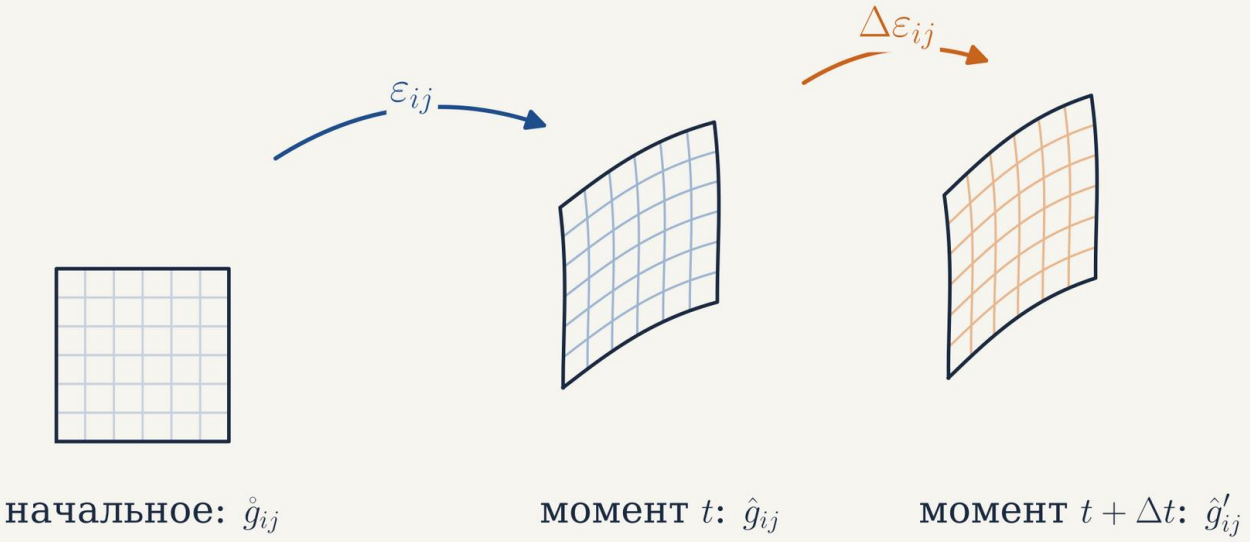
Алматы, 2026 год

Три состояния сплошной среды

Тензор деформаций вводится в связи с двумя состояниями среды — данным $\hat{g}_{ij}$ и «начальным» $\mathring{g}_{ij}$:

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2}\left(\hat{g}_{ij} - \mathring{g}_{ij}\right)$$

Рассмотрим ещё состояние в момент **t + Δt**, близкое к данному. Компоненты метрического тензора в этот момент обозначим $\hat{g}'_{ij}$.



Начальное состояние, состояние в момент t и близкое состояние в момент t + Δt

Приращение деформаций за время Δt

Введём компоненты тензора деформаций по отношению к состояниям в моменты *t* и *t* + Δt:

$$\Delta\varepsilon_{ij} = \tfrac{1}{2}\left(\hat{g}'_{ij} - \hat{g}_{ij}\right) = \tfrac{1}{2}\left[\nabla_i w_j + \nabla_j w_i + \nabla_i w^{\ell}\,\nabla_j w_{\ell}\right] \tag{7.1}$$

Формула (7.1) верна, так как перемещение **w** из состояния в момент *t* в состояние в момент *t* + Δt существует. Очевидно,

$$\vec{w} = w_i\,\hat{\vec{\mathfrak{e}}}^{\,i} = \vec{v}\,\Delta t = v_i\,\hat{\vec{\mathfrak{e}}}^{\,i}\,\Delta t, \qquad w_i = v_i\,\Delta t$$

Малое перемещение

$w_i = v_i\Delta t$ имеет порядок Δt и бесконечно мало при малом Δt.

Квадратичный член

$\nabla_i w^{\ell}\nabla_j w_{\ell}$ имеет порядок Δt^2 и исчезает при делении на Δt.

Результат

Предел $\Delta\varepsilon_{ij}/\Delta t$ зависит только от первых производных скорости.

Тензор скоростей деформаций

Делим (7.1) на Δt и переходим к пределу:

$$\lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta \varepsilon_{ij}}{\Delta t} = \frac{1}{2}\left(\nabla_i v_j + \nabla_j v_i\right) = e_{ij}$$

Величины e_{ij} — компоненты симметричного тензора, который называется **тензором скоростей деформаций**. Если поле скоростей **v** известно:

$$e_{ij} = \frac{1}{2}\left(\nabla_i v_j + \nabla_j v_i\right) \qquad (7.2)$$

Структура тензора e_{ij}

e_{11}	e_{12}	e_{13}
e_{21}	e_{22}	e_{23}
e_{31}	e_{32}	e_{33}

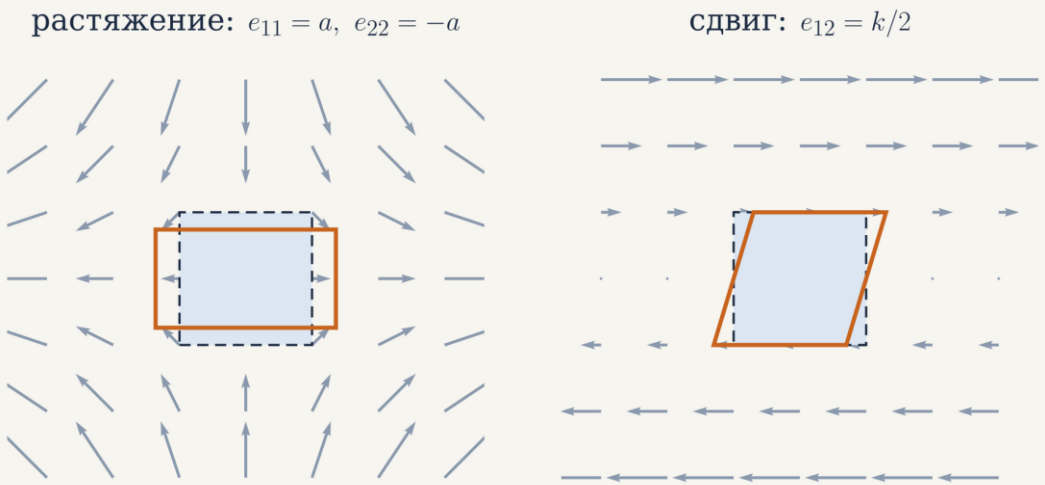
- **Диагональные** — скорости удлинения волокон
- **Недиагональные** — скорости сдвига (скашивания углов)
- $e_{ij} = e_{ji}$: 6 независимых компонент

Компоненты e_{ij} в декартовой системе

В декартовой системе ковариантные производные — обычные частные производные:

$$e_{11} = \frac{\partial v_1}{\partial x^1}, \qquad e_{22} = \frac{\partial v_2}{\partial x^2}, \qquad e_{33} = \frac{\partial v_3}{\partial x^3}$$

$$e_{12} = \tfrac{1}{2}\left(\frac{\partial v_1}{\partial x^2} + \frac{\partial v_2}{\partial x^1}\right), \quad e_{23} = \tfrac{1}{2}\left(\frac{\partial v_2}{\partial x^3} + \frac{\partial v_3}{\partial x^2}\right), \quad e_{13} = \tfrac{1}{2}\left(\frac{\partial v_1}{\partial x^3} + \frac{\partial v_3}{\partial x^1}\right)$$



Диагональные e_{ii} — скорости относительного удлинения отрезков среды.

Недиагональные e_{ij} — скорости скошения первоначально прямых углов.

Распределение скоростей в окрестности точки

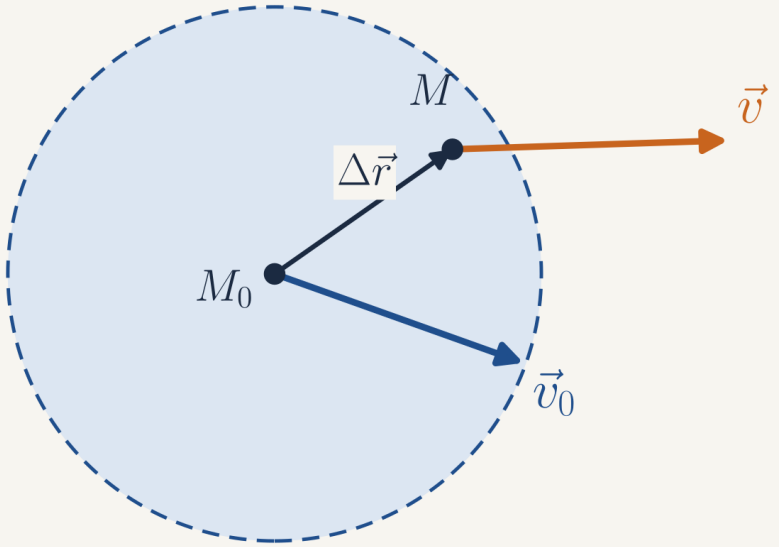
Выразим скорость **v** частицы *M* через скорость $\mathbf{v_0}$ смежной частицы M_0.
Разложим **v** в ряд Тейлора в окрестности M_0:

$$\vec{v} = \vec{v}_0 + \left(\frac{\partial \vec{v}}{\partial \xi^i}\right)_0 \Delta r^i + O(\Delta r^2)$$

или, с точностью до членов первого порядка,

$$\vec{v} = \vec{v}_0 + \nabla_i v_j \, \vec{\mathfrak{e}}^{\,j} \Delta r^i = \vec{v}_0 + e_{ij} \, \vec{\mathfrak{e}}^{\,j} \Delta r^i + \omega_{ij} \, \vec{\mathfrak{e}}^{\,j} \Delta r^i \qquad (7.3)$$

Тензор $\nabla_i v_j$ разбит на **симметричную** часть e_{ij} и **антисимметричную** часть ω_{ij}.



Окрестность точки M_0: скорость v в близкой точке M

Тензор скоростей деформаций и тензор вихря

$$e_{ij} = \frac{1}{2}\left(\nabla_i v_j + \nabla_j v_i\right), \qquad \omega_{ij} = \frac{1}{2}\left(\nabla_i v_j - \nabla_j v_i\right)$$

$$\nabla_i v_j = e_{ij} + \omega_{ij}, \qquad e_{ij} = e_{ji}, \qquad \omega_{ij} = -\omega_{ji}$$

$$\omega_{ij}\,\vec{\mathfrak{d}}^{\,j}\Delta r^i = \vec{\omega} \times \Delta\vec{r}, \qquad \vec{\omega} = \frac{1}{2}\,\mathrm{rot}\,\vec{v}$$

6 компонент у симметричного тензора e_{ij}

Тензор скоростей деформаций: описывает изменение формы и объёма частицы.

3 компоненты у антисимметричного тензора ω_{ij}

Тензор завихренности: эквивалентен вектору вихря **ω** = ½ rot **v** и описывает вращение частицы.

Механическое истолкование членов формулы (7.3)

Если тензор скоростей деформаций $e_{ij} = 0$, то

$$\vec{v} = \vec{v}_0 + \omega_{ij}\,\vec{\mathcal{E}}^{\,j}\,\Delta r^i \qquad (7.4)$$

— движение в окрестности точки M_0 является **вращением абсолютно твёрдого тела**.

$e_{ij} = 0$, $\omega_{ij} \neq 0$

вращение окрестности как твёрдого тела

$e_{ij} = 0$, $\omega_{ij} = 0$

поступательное движение со скоростью v_0

$\omega_{ij} = 0$ во всех точках

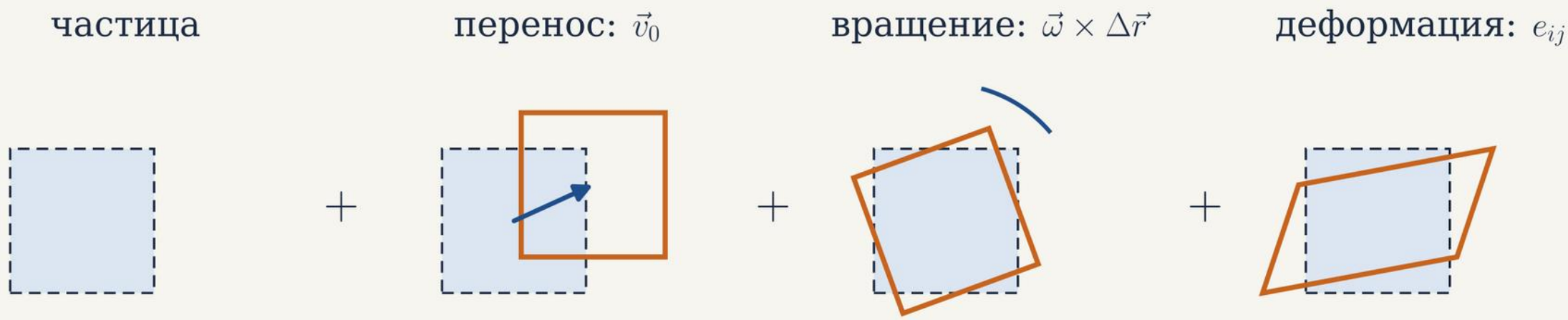
поле скоростей безвихревое («безвращательное»)

Теорема Коши – Гельмгольца

«Любое движение элементарного объёма сплошной среды можно в данное мгновение рассматривать как результат сложения двух движений: **квазитвёрдого**, состоящего из поступательного и вращательного, и **деформационного**».

$$\vec{v} = \vec{v}_{\text{кт}} + \vec{v}_{\text{деф}} = \vec{v}_0 + \vec{v}_{\text{вращ}} + \vec{v}_{\text{деф}}$$

$$\vec{v}_{\text{вращ}} = \vec{\omega} \times \Delta\vec{r}, \qquad \vec{v}_{\text{деф}} = e_{ij}\,\vec{\mathfrak{e}}^{\,j}\Delta r^{i}$$



Пример: простое сдвиговое течение

Поле скоростей:

$$v_1 = k\,x^2, \qquad v_2 = 0, \qquad v_3 = 0$$

$$\left(\frac{\partial v_i}{\partial x^j}\right) = \begin{pmatrix} 0 & k \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & k/2 \\ k/2 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & k/2 \\ -k/2 & 0 \end{pmatrix}$$

Разложение градиента скорости:

$$e_{12} = e_{21} = \frac{k}{2}, \qquad \omega_3 = \tfrac{1}{2}\left(\frac{\partial v_2}{\partial x^1} - \frac{\partial v_1}{\partial x^2}\right) = -\frac{k}{2}$$



Тензор деформаций и тензор скоростей деформаций

Характеристика	Тензор деформаций ε_{ij}	Тензор скоростей деформаций e_{ij}
Определение	$\frac{1}{2}(\hat{g}_{ij} - \mathring{g}_{ij})$ — сравнение двух состояний	$\lim \Delta\varepsilon_{ij}/\Delta t$ — скорость изменения деформаций
Выражается через	вектор перемещения w	вектор скорости v
Связь с вектором	в общем случае нелинейная (5.3)	всегда линейная: $\frac{1}{2}(\nabla_i v_j + \nabla_j v_i)$
Диагональные компоненты	удлинения волокон	скорости удлинения волокон
Недиагональные компоненты	сдвиги (изменение углов)	скорости скашивания углов
Применение	теория упругости, пластичности	гидромеханика, вязкие среды

Заключение и вопросы для самоконтроля

Выводы

1. Рассматривая состояния в моменты t и t + Δt, получаем приращение деформаций $\Delta\varepsilon_{ij}$ (7.1).
2. Тензор скоростей деформаций $e_{ij} = ½(\nabla_i v_j + \nabla_j v_i)$ симметричен и вычисляется по полю скоростей.
3. Скорость в окрестности точки: $v = v_o + e_{ij}э^j\Delta r^i + \omega_{ij}э^j\Delta r^i$.
4. При $e_{ij} = 0$ окрестность вращается как твёрдое тело; при $\omega_{ij} = 0$ всюду поле безвихревое.
5. Теорема Коши – Гельмгольца: движение частицы = перенос + вращение + деформация.

Контрольные вопросы

1. Как вводится приращение деформаций $\Delta\varepsilon_{ij}$ за время Δt?
2. Дайте определение тензора скоростей деформаций. Запишите формулу (7.2).
3. Каков физический смысл диагональных и недиагональных компонент e_{ij}?
4. Как связаны тензор ω_{ij} и вектор вихря $\omega = ½ \operatorname{rot} v$?
5. Какое движение совершает окрестность точки, если $e_{ij} = 0$?
6. Какое поле скоростей называется безвихревым?
7. Сформулируйте теорему Коши – Гельмгольца.
8. Разложите простое сдвиговое течение $v_1 = kx^2$ на деформацию и вращение.