Казахский национальный университет имени аль-Фараби

Факультет механико-математический

Кафедра механики

Образовательная программа «6B05403 – Механика»

Дисциплина: Введение в механику сплошной среды

Лекция № 14

Модели сплошной среды. Идеальная несжимаемая жидкость. Идеальный совершенный газ. Вязкая несжимаемая жидкость

Преподаватель: Туралина Динара Елеусизовна

к.ф.-м.н., ассистент-профессор

Алматы, 2026 год

Модели сплошной среды

Уравнения неразрывности, движения и притока тепла справедливы для любой среды, но **не замкнуты**: неизвестных больше, чем уравнений. Модель среды задаётся **определяющим соотношением** — законом связи тензора напряжений с кинематикой и термодинамикой.

Идеальная несжимаемая жидкость

$P^{ij} = -p\, g^{ij}$, $\rho = \text{const}$

Неизвестные: v^i, p

Идеальный совершенный газ

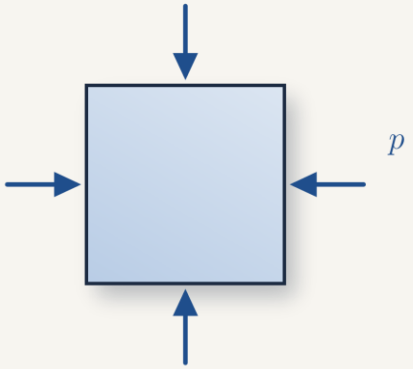
$P^{ij} = -p\, g^{ij}$, $p = \rho R T$, $U = c_v T$

Неизвестные: ρ, v^i, p, T

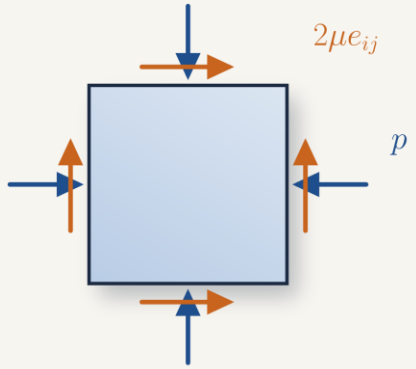
Вязкая несжимаемая жидкость

$P^{ij} = -p\, g^{ij} + 2\mu\, e^{ij}$, $\rho = \text{const}$

Неизвестные: v^i, p



идеальная жидкость



вязкая жидкость

Идеальная жидкость

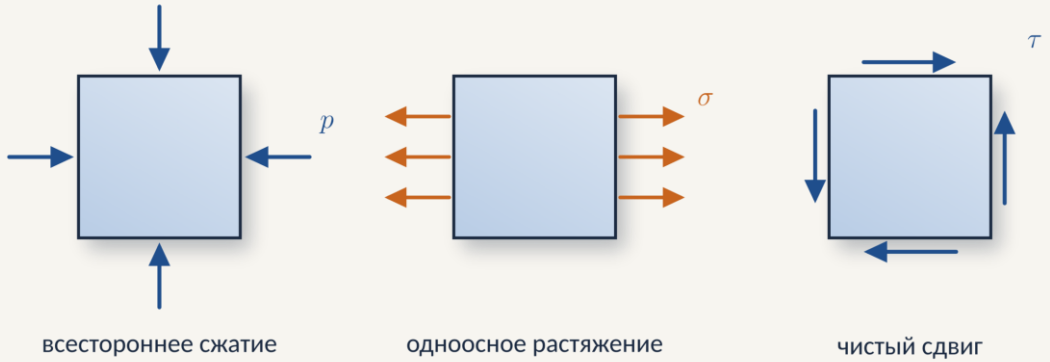
Во многих задачах эффекты вязкости пренебрежимо малы. Тогда коэффициенты вязкости равны нулю, и закон поведения среды:

$$P^{ij} = -p\, g^{ij} \tag{14.1}$$

Жидкость с таким определяющим уравнением называется **идеальной**. Напряжение на любой площадке направлено по нормали, касательных напряжений нет.

Дивергенция тензора напряжений:

$$\nabla_j P^{ij} = \nabla_j\left(-p\, g^{ij}\right) = -\nabla^i p$$



Уравнения Эйлера

Подставляя (14.1) в уравнение динамики (10.2), получаем уравнение движения идеальной жидкости:

$$\rho \frac{d\vec{v}}{dt} = \rho\vec{F} - \operatorname{grad} p \tag{14.2}$$

Ему эквивалентны три скалярных **уравнения Эйлера**:

$$\frac{dv^i}{dt} = F^i - \frac{1}{\rho}\nabla^i p \tag{14.3}$$

где

$$\frac{dv^i}{dt} = \frac{\partial v^i}{\partial t} + v^j \nabla_j v^i$$

Инерция

ρ dv/dt — изменение импульса единицы объёма

Массовая сила

ρF — например, сила тяжести

Градиент давления

−grad p — жидкость ускоряется от высокого давления к низкому

Идеальная несжимаемая жидкость

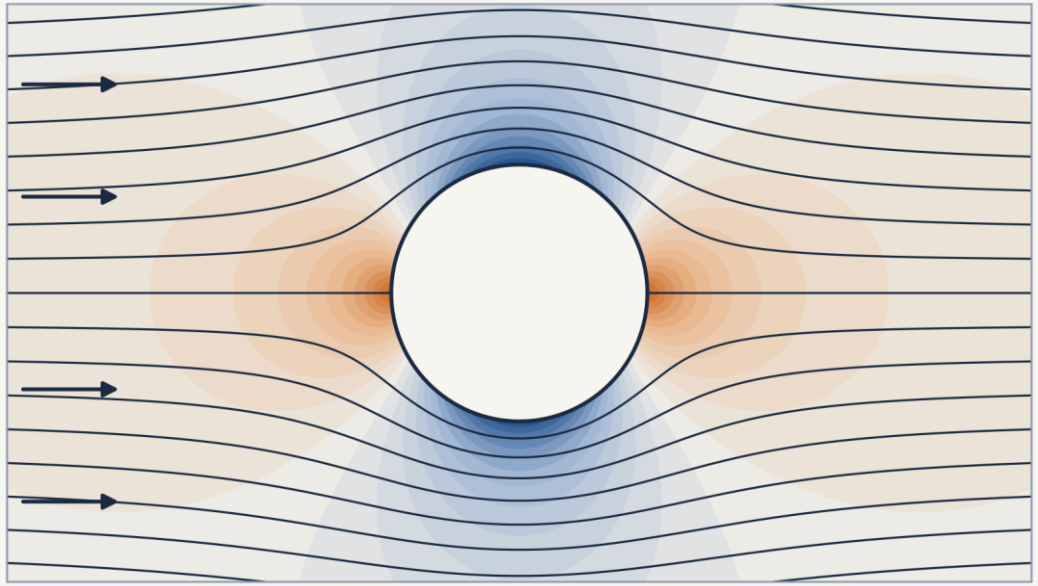
К уравнениям Эйлера присоединяется уравнение неразрывности в виде **условия несжимаемости**:

$$\nabla_i v^i = 0 \tag{14.4}$$

Система (14.3), (14.4) **замкнута**: 4 уравнения для 4 неизвестных v^1, v^2, v^3, p. Она определяет модель идеальной несжимаемой жидкости.

В декартовой системе координат:

$$\frac{\partial v^i}{\partial t} + v^j \frac{\partial v^i}{\partial x^j} = F^i - \frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x^i}, \qquad \frac{\partial v^i}{\partial x^i} = 0$$



Обтекание цилиндра идеальной несжимаемой жидкостью

Идеальный совершенный газ

Пример идеальной **сжимаемой** среды — идеальный совершенный газ. Модель задаётся двумя функциями:

$$U = c_V T + \text{const}, \qquad p = \rho R T \qquad (c_V,\ R = \text{const}) \tag{14.5}$$

Если массовые силы **F** и приток тепла $dq^{(e)}$ заданы, то уравнение притока тепла

$$dU = -p\, d\left(\frac{1}{\rho}\right) + dq^{(e)} \tag{14.6}$$

уравнение неразрывности

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla_i \left(\rho v^i\right) = 0$$

Замкнутая система

уравнения Эйлера (3) + неразрывность (1) + приток тепла (1) + уравнение состояния (1)

Неизвестные (6)

ρ, v^1, v^2, v^3, p, T

Теплопроводность. Закон Фурье

Количество тепла, поступающее к единице массы за время dt:

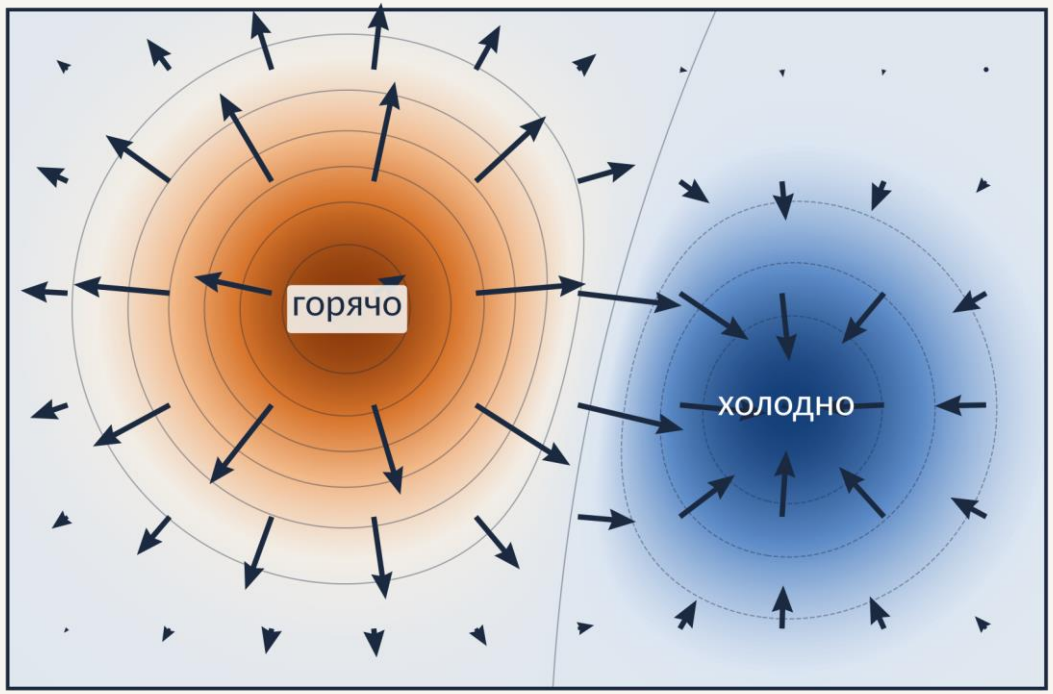
$$dq^{(e)} = -\frac{1}{\rho}\,\mathrm{div}\,\vec{q}\,dt \tag{14.7}$$

q — вектор потока тепла. Для изотропных сред он связан с полем температуры **законом Фурье**:

$$\vec{q} = -\varkappa\,\mathrm{grad}\,T \tag{14.8}$$

$\varkappa$ — коэффициент теплопроводности. При $\varkappa$ = const:

$$\frac{dq^{(e)}}{dt} = \frac{1}{\rho}\,\mathrm{div}\big(\varkappa\,\mathrm{grad}\,T\big) = \frac{\varkappa}{\rho}\,\Delta T \qquad (\varkappa = \mathrm{const})$$



$\vec{q} = -\varkappa\,\nabla T$ — поток тепла от горячего к холодному

Уравнение притока тепла для газа

Подставляя $U = c_v T$ и закон Фурье в (14.6) при $dq^{(**)} = 0$, получаем уравнение притока тепла для совершенного газа:

$$c_V\left(\frac{\partial T}{\partial t} + v^i \frac{\partial T}{\partial x^i}\right) = -p\,\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{\rho}\right) + \frac{\varkappa}{\rho}\,\Delta T \qquad (14.9)$$

Нагрев частицы

$c_v\, dT/dt$ — изменение внутренней энергии единицы массы

Работа сжатия

$-p\, d(1/\rho)/dt$ — газ нагревается при сжатии

Теплопроводность

$(\varkappa/\rho)\Delta T$ — тепло приходит из более нагретых областей

Для покоящейся среды ($v = 0$, $\rho = \text{const}$) получаем классическое уравнение теплопроводности $\partial T/\partial t = a\,\Delta T$.

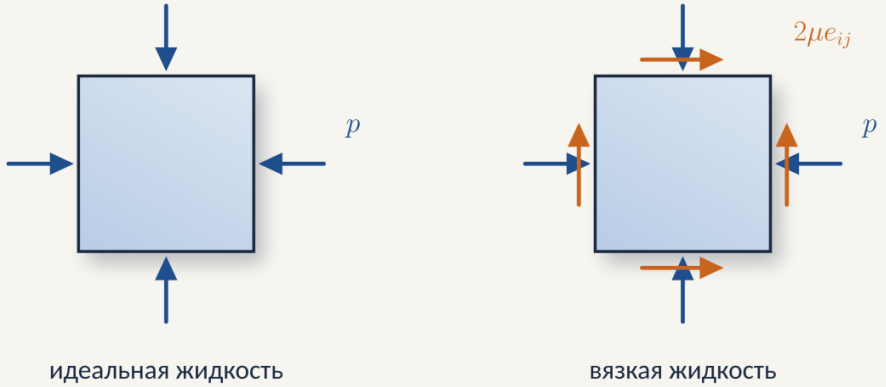
Вязкая несжимаемая жидкость

Рассмотрим изотермическое движение однородной вязкой несжимаемой жидкости: ρ = const. Жидкость **вязкая**, если тензор напряжений связан с тензором скоростей деформаций законом **Навье — Стокса** (при $J_1 = \nabla_i v^i = 0$):

$$P^{ij} = -p\,g^{ij} + 2\mu\,g^{i\alpha}g^{j\beta}e_{\alpha\beta}, \qquad e_{ij} = \tfrac{1}{2}\left(\nabla_i v_j + \nabla_j v_i\right)$$

Помимо нормальной, поверхностная сила имеет **касательную** составляющую. Дивергенция тензора напряжений:

$$\nabla_j P^{ij} = -\nabla^i p + \mu\,\Delta v^i, \qquad \nabla_i P^{\,i} = -\operatorname{grad} p + \mu\,\Delta\vec{v}$$



μ — динамический коэффициент вязкости; при изотермических процессах его можно считать постоянным.

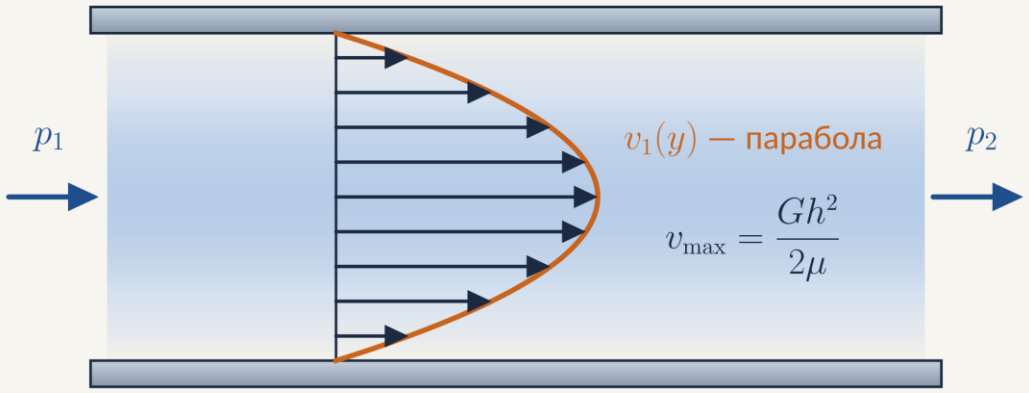
Уравнения Навье — Стокса

Уравнения движения вязкой несжимаемой жидкости — **уравнения Навье — Стокса**:

$$\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + (\vec{v}\cdot\nabla)\vec{v} = \vec{F} - \frac{1}{\rho}\operatorname{grad} p + \nu\,\Delta\vec{v}, \qquad \nu = \frac{\mu}{\rho} \tag{14.10}$$

$\nu = \mu/\rho$ — кинематический коэффициент вязкости. Вместе с условием несжимаемости — замкнутая система для v^i и p:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial v^i}{\partial t} + v^j \nabla_j v^i = F^i - \dfrac{1}{\rho}\nabla^i p + \nu\,\Delta v^i \\ \nabla_i v^i = 0 \end{cases} \tag{14.11}$$



$p_1 > p_2$: перепад давления G уравновешивается вязким трением

$$v_1(y) = \frac{G}{2\mu}\left(h^2 - y^2\right), \qquad G = -\frac{\partial p}{\partial x^1}$$

Течение Пуазейля в плоском канале — точное решение (14.11).

Сравнение моделей

	Идеальная несжимаемая жидкость	Идеальный совершенный газ	Вязкая несжимаемая жидкость
Тензор напряжений	$P^{ij} = -p\, g^{ij}$	$P^{ij} = -p\, g^{ij}$	$P^{ij} = -p\, g^{ij} + 2\mu e^{ij}$
Плотность	$\rho = \text{const}$	$p = \rho RT$	$\rho = \text{const}$
Уравнения движения	Эйлера (14.3)	Эйлера (14.3)	Навье — Стокса (14.10)
Энергия	не нужна	приток тепла (14.9)	не нужна (изотермия)
Неизвестные	v^1, v^2, v^3, p	$\rho, v^1, v^2, v^3, p, T$	v^1, v^2, v^3, p
Касательные напряжения	нет	нет	есть

Заключение и вопросы для самоконтроля

Выводы

1. Модель среды задаётся определяющим соотношением, замыкающим общие уравнения МСС.
2. Идеальная жидкость: $P^{ij} = -p\, g^{ij}$; уравнения Эйлера $dv/dt = F - (1/\rho)\,\mathrm{grad}\, p$.
3. Идеальная несжимаемая жидкость: уравнения Эйлера + $\nabla_i v^i = 0$ — 4 уравнения для v^i, p.
4. Совершенный газ: $p = \rho R T$, $U = c_v T$; с законом Фурье $q = -\varkappa\, \mathrm{grad}\, T$ — замкнутая система для ρ, v^i, p, T.
5. Вязкая несжимаемая жидкость: уравнения Навье — Стокса $\partial v/\partial t + (v\cdot\nabla)v = F - (1/\rho)\,\mathrm{grad}\, p + \nu\Delta v$.

Контрольные вопросы

1. Почему общие уравнения МСС не замкнуты? Что замыкает систему?
2. Какая жидкость называется идеальной? Запишите её определяющее соотношение.
3. Выведите уравнения Эйлера (14.3) из уравнения динамики.
4. Какими функциями задаётся модель совершенного газа?
5. Сформулируйте закон Фурье. Что такое коэффициент теплопроводности?
6. Запишите закон Навье — Стокса для несжимаемой жидкости.
7. Выведите уравнения Навье — Стокса (14.10). Что такое кинематическая вязкость?