**Казахский национальный университет имени аль-Фараби**

**Факультет механико-математический**

**Кафедра механики**

Образовательная программа «6B05403 – Механика»

**Дисциплина: Введение в механику сплошной среды**

# Лекция № 11

## Теорема об изменении кинетической энергии

**Преподаватель: Туралина Динара Елеусизовна**

к.ф.-м.н., ассистент-профессор

**Алматы, 2026 год**

# Исходное соотношение

Возьмём вектор перемещения бесконечно малого объёма среды за время dt:

$$d\vec{r} = \vec{v}\,dt$$

Умножим скалярно уравнение импульсов (10.2) на d**r** и проинтегрируем по объёму τ:

$$\int_\tau \rho \frac{d\vec{v}}{dt} \cdot \vec{v}\,dt\,d\tau = \int_\tau \rho\vec{F} \cdot d\vec{r}\,d\tau + \int_\tau \left(\nabla_j P^{ij}\right) v_i\,dt\,d\tau \qquad (11.1)$$

### Левая часть

приращение кинетической энергии объёма τ — **dE**

### Первый интеграл справа

работа массовых сил — внешних и внутренних

### Второй интеграл справа

работа поверхностных сил — внешних и внутренних

Преобразуем каждый из интегралов по очереди.

# Кинетическая энергия сплошной среды

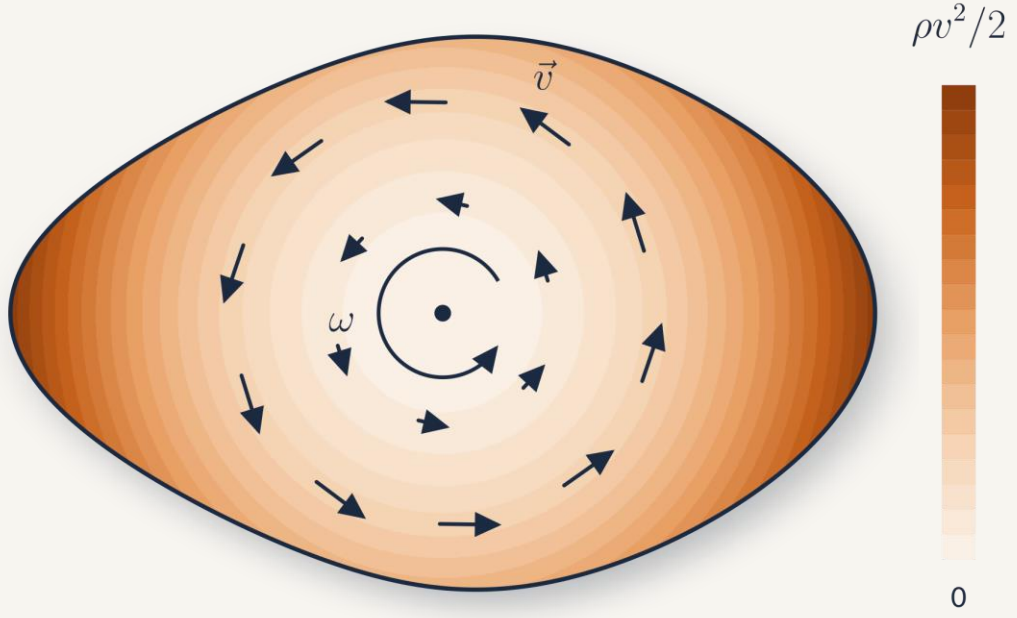
Так как масса dm = ρdτ частицы постоянна, левая часть (11.1) равна дифференциалу кинетической энергии:

$$\int_\tau \vec{v}\cdot\frac{d\vec{v}}{dt}\,\rho\,d\tau\,dt = \int_m d\Big(\frac{v^2}{2}\Big)dm = d\int_m \frac{v^2}{2}\,dm = dE$$

**Кинетическая энергия** объёма τ:

$$E = \int_m \frac{v^2}{2}\,dm = \int_\tau \frac{\rho v^2}{2}\,d\tau$$

Плотность кинетической энергии ρv²/2 — скалярное поле; например, во вращающемся теле она растёт пропорционально квадрату расстояния от оси.



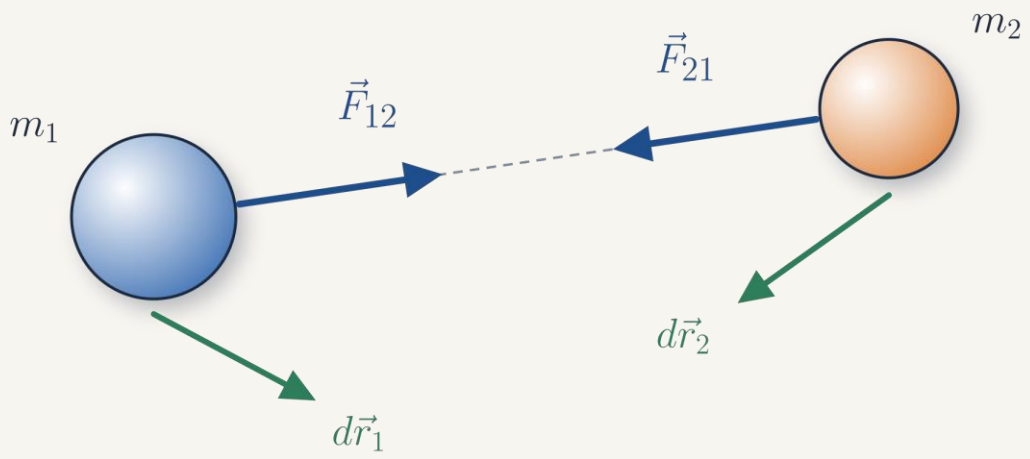

Распределение плотности кинетической энергии во вращающемся теле

# Работа массовых сил

Разобьём массовые силы на две группы: **F**$^{(i)}$ — внутренние и **F**$^{(e)}$ — внешние по отношению ко всему объёму τ:

$$\int_\tau \rho\vec{F}\cdot d\vec{r}\,d\tau = \int_\tau \rho\vec{F}^{(e)}\cdot d\vec{r}\,d\tau + \int_\tau \rho\vec{F}^{(i)}\cdot d\vec{r}\,d\tau = \delta A_m^{(e)} + \delta A_m^{(i)}$$

$\delta A_m^{(e)}$ и $\delta A_m^{(i)}$ — элементарные работы внешних и внутренних массовых сил на бесконечно малом перемещении.




$$\vec{F}_{12} = -\vec{F}_{21}: \qquad \delta A = \vec{F}_{12}\cdot d\vec{r}_1 + \vec{F}_{21}\cdot d\vec{r}_2 = \vec{F}_{12}\cdot\left(d\vec{r}_1 - d\vec{r}_2\right)$$

**Сумма внутренних сил равна нулю, а их работа может быть отлична от нуля**: если частицы сближаются или удаляются, $dr_1 \neq dr_2$.

# Работа поверхностных сил: преобразование

Последний интеграл в (11.1) запишем в виде двух интегралов:

$$\int_\tau (\nabla_j P^{ij}) v_i \, dt \, d\tau = \int_\tau \nabla_j (P^{ij} v_i) \, dt \, d\tau - \int_\tau P^{ij} \nabla_j v_i \, dt \, d\tau$$

Воспользуемся очевидным тождеством ($e_{ij}$ — тензор скоростей деформаций, $\omega_{ij}$ — тензор вихря):

$$\nabla_j v_i = \tfrac{1}{2}(\nabla_j v_i + \nabla_i v_j) + \tfrac{1}{2}(\nabla_j v_i - \nabla_i v_j) = e_{ij} + \omega_{ij}$$

и формулой Гаусса — Остроградского:

$$\int_\tau (\nabla_j P^{ij}) v_i \, dt \, d\tau = \int_\sigma P^{ij} v_i n_j \, dt \, d\sigma - \int_\tau P^{ij} e_{ij} \, dt \, d\tau - \int_\tau P^{ij} \omega_{ij} \, dt \, d\tau$$

**$\int P^{ij} v_i n_j \, dt \, d\sigma$**

работа внешних поверхностных сил на границе σ

**$-\int P^{ij} e_{ij} \, dt \, d\tau$**

работа внутренних напряжений на деформациях

**$-\int P^{ij} \omega_{ij} \, dt \, d\tau$**

вклад вращения частиц — далее покажем, что он равен нулю

# Вклад вращения равен нулю

В силу антисимметрии тензора $\omega_{ij}$ и **симметрии тензора напряжений** (лекция 10):

$$P^{ij}\omega_{ij} = \sum_{i<j}\left(P^{ij}\omega_{ij} + P^{ji}\omega_{ji}\right) = \sum_{i<j}\left(P^{ij} - P^{ji}\right)\omega_{ij} = 0$$

Поэтому в классическом случае ($P^{ij} = P^{ji}$) последний интеграл равен нулю: **вращение частицы как твёрдого тела не совершает работы против внутренних напряжений**.




Числовой пример: слагаемые свёртки $P^{ij}\omega_{ij}$ попарно взаимно уничтожаются

# Работа внешних поверхностных сил

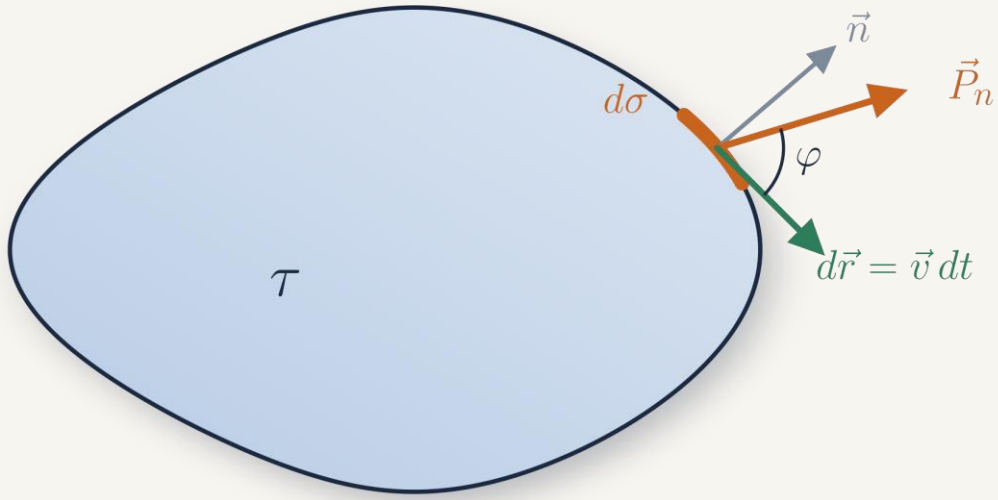
Так как

$$\vec{P}_n = P^{ij} n_j \, \vec{\mathfrak{e}}_i, \qquad d\vec{r} = v_i \, dt \, \vec{\mathfrak{e}}^{\,i}$$

первый интеграл в правой части преобразования равен работе внешних поверхностных сил:

$$\int_\sigma P^{ij} v_i n_j \, dt \, d\sigma = \int_\sigma \vec{P}_n \cdot d\vec{r} \, d\sigma = \delta A_n^{(e)}$$

Работа на элементе поверхности определяется проекцией вектора напряжений на перемещение: если $\mathbf{P}_n \perp d\mathbf{r}$, работа равна нулю.




$$\delta A = \vec{P}_n \cdot d\vec{r} \, d\sigma = |\vec{P}_n| \, |d\vec{r}| \cos\varphi \, d\sigma$$

# Работа внутренних поверхностных сил

**Работой внутренних поверхностных сил** (сил напряжений) в объёме назовём интеграл

$$\delta A_n^{(i)} = -\int_\tau P^{ij} e_{ij}\, dt\, d\tau$$

Это **инвариантная** величина: свёртка двух тензоров не зависит от выбора системы координат. Работа определяется только **скоростями деформаций** — при движении без деформации она равна нулю.

### Абсолютно твёрдое тело

$$e_{ij} = 0 \quad \Rightarrow \quad \delta A_n^{(i)} = 0$$

### Идеальная жидкость

$$P^{ij} = -p\, g^{ij} \quad \Rightarrow \quad \delta A_n^{(i)} = \int_\tau p\, \nabla_i v^i\, dt\, d\tau$$

### Несжимаемая идеальная жидкость

$$\nabla_i v^i = 0 \quad \Rightarrow \quad \delta A_n^{(i)} = 0$$

# Пример: диссипация энергии в вязком течении

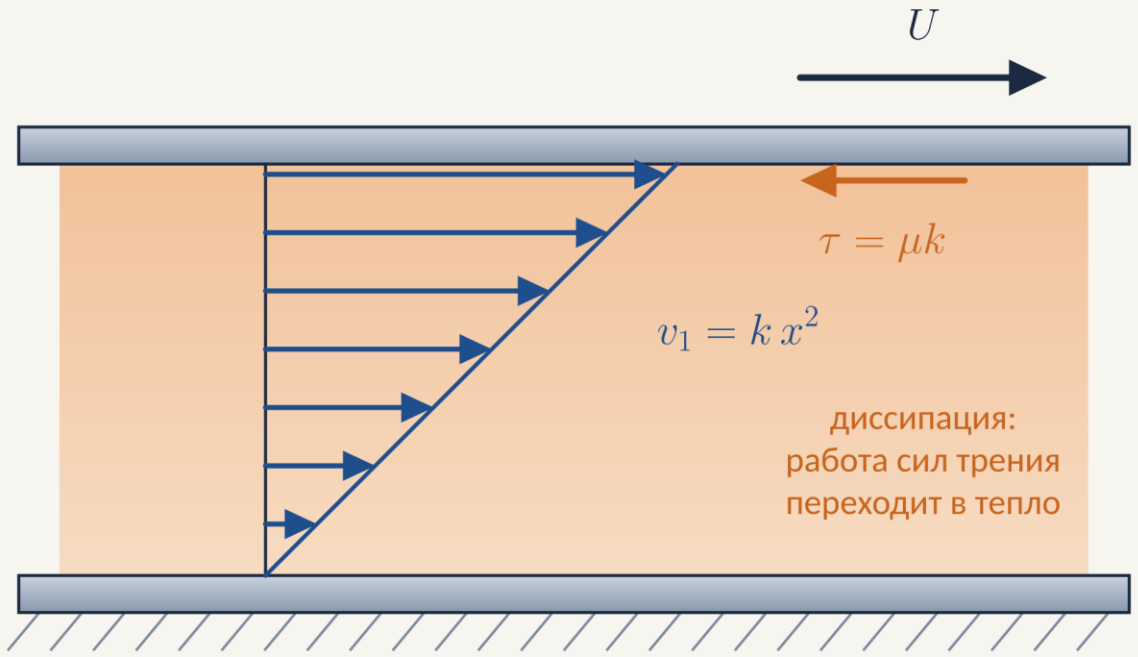
Течение Куэтта: вязкая жидкость между неподвижной и движущейся пластинами. Касательное напряжение по закону Ньютона:

$$v_1 = k\,x^2: \quad e_{12} = e_{21} = \frac{k}{2}, \quad P^{12} = P^{21} = \mu k$$

Работа внутренних сил на единицу объёма в единицу времени:

$$-P^{ij} e_{ij} = -2P^{12} e_{12} = -\mu k^2 < 0$$

**Работа внутренних поверхностных сил отрицательна: механическая энергия необратимо рассеивается — переходит в тепло.**




Течение Куэтта: линейный профиль скорости и касательное напряжение τ = μk

# Теорема об изменении кинетической энергии

Собирая все слагаемые, равенство (11.1) можно записать в виде:

$$dE = \delta A_m^{(e)} + \delta A_m^{(i)} + \delta A_n^{(e)} + \delta A_n^{(i)} \qquad (11.2)$$

**$\delta A_m^{(e)}$**

работа внешних массовых сил

**$\delta A_m^{(i)}$**

работа внутренних массовых сил

**$\delta A_n^{(e)}$**

работа внешних поверхностных сил

**$\delta A_n^{(i)}$**

работа внутренних поверхностных сил (напряжений)

**dE** — приращение кинетической энергии объёма τ за время dt

# Работа внутренних сил в разных системах

| Система | Работа внутренних сил | Теорема |
|---|---|---|
| Материальная точка | внутренних сил нет | $dE = \delta A$ |
| Абсолютно твёрдое тело | равна нулю (расстояния не меняются) | $dE = \delta A^{(e)}$ |
| Система точек | в общем случае ≠ 0 | $dE = \delta A^{(e)} + \delta A^{(i)}$ |
| Сплошная среда | $\delta A_n^{(i)} = -\int P^{ij} e_{ij}\, dt\, d\tau$ — зависит от скоростей деформаций | $dE = \delta A_m^{(e)} + \delta A_m^{(i)} + \delta A_n^{(e)} + \delta A_n^{(i)}$ |
| Идеальная несжимаемая жидкость | $\delta A_n^{(i)} = 0$ | $dE = \delta A_m^{(e)} + \delta A_n^{(e)}$ |
| Вязкая жидкость | $\delta A_n^{(i)} < 0$ — диссипация энергии | часть работы переходит в тепло |

# Заключение и вопросы для самоконтроля

## Выводы

1. Умножив уравнение импульсов скалярно на $dr = vdt$ и проинтегрировав по объёму, получаем соотношение (11.1).
2. Левая часть — приращение кинетической энергии $dE$, $E = \int \rho v^2/2 \, d\tau$.
3. Работа массовых сил делится на работу внешних и внутренних сил; работа внутренних сил может быть отлична от нуля.
4. Из-за симметрии $P^{ij}$ вращение частицы не даёт вклада; работа внутренних напряжений $\delta A_n^{(i)} = -\int P^{ij} e_{ij} \, dt \, d\tau$.
5. Теорема (11.2): $dE = \delta A_m^{(e)} + \delta A_m^{(i)} + \delta A_n^{(e)} + \delta A_n^{(i)}$.

## Контрольные вопросы

1. Как получается исходное соотношение (11.1)?
2. Почему левая часть (11.1) равна $dE$? Дайте определение кинетической энергии сплошной среды.
3. Почему работа внутренних массовых сил может быть отлична от нуля?
4. Какое тождество используется для градиента скорости $\nabla_j v_i$?
5. Почему интеграл $\int P^{ij} \omega_{ij} \, dt \, d\tau$ равен нулю в классическом случае?
6. Что называется работой внутренних поверхностных сил? Почему это инвариант?
7. Чему равна работа внутренних сил для твёрдого тела и для несжимаемой идеальной жидкости?
8. Сформулируйте теорему об изменении кинетической энергии (11.2).