Казахский национальный университет имени аль-Фараби

Факультет механико-математический

Кафедра механики

Образовательная программа «6B05403 – Механика»

Дисциплина: Введение в механику сплошной среды

Лекция № 15

Упругие сплошные среды. Линейное упругое тело

Преподаватель: Туралина Динара Елеусизовна

к.ф.-м.н., ассистент-профессор

Алматы, 2026 год

Упругая сплошная среда

Сплошная среда по определению называется **упругой**, если выполнены три условия:

1. Мера деформации

состояние деформации характеризуется тензором деформаций ε_{ij}

2. Естественное состояние

существует состояние без напряжений и без деформаций: $P^{ij} = 0$ при $\varepsilon_{ij} = 0$

3. Взаимная однозначность

в любой точке и в любой момент P^{ij} — взаимно однозначная функция ε_{ij}

В общем случае закон поведения упругой среды:

$$P^{ij} = P^{ij}\left(\varepsilon_{\alpha\beta}, M, \chi^{ik}, \mu^{i}\right), \qquad P^{ij}\big|_{\varepsilon=0} = 0 \tag{15.1}$$

M — точка среды, χ^{ik} — параметры анизотропии, μ^{i} — термодинамические параметры.

Линейная и классическая теория упругости

Упругое тело

P^{ij} — взаимно однозначная функция ε_{ij} (15.1)

Линейно упругое тело

напряжения линейно зависят от деформаций (физическая линейность)

Классическое упругое тело

дополнительно: гипотезы однородности и изотропности

Однородность

свойства одинаковы во всех точках тела

Изотропность

свойства одинаковы во всех направлениях

Модель классического упругого тела описывает большинство конструкционных материалов при малых деформациях: стали, алюминиевые сплавы, бетон.

Закон Гука для изотропной среды

Чтобы выполнялось требование линейности относительно тензора деформаций, должно быть

$$P^{ij} = \lambda_1 J_1\, g^{ij} + 2\lambda_2\, g^{i\alpha} g^{j\beta} \varepsilon_{\alpha\beta} \tag{15.2}$$

или

$$P_{ij} = \lambda J_1\, g_{ij} + 2\mu\, \varepsilon_{ij}, \qquad J_1 = \varepsilon^{k}_{\ k} = \nabla_k w^k$$

При $\lambda_1 = \lambda = \text{const}$, $\lambda_2 = \mu = \text{const}$ это **закон Гука** для изотропной упругой среды (тело Гука); λ и μ — **упругие постоянные Ламе**.

$J_1 = \theta$ — объёмная деформация

$\lambda J_1 g_{ij}$ — шаровая часть: реакция на изменение объёма

$2\mu\varepsilon_{ij}$

сопротивление изменению формы; μ — модуль сдвига

Закон Гука в декартовых координатах

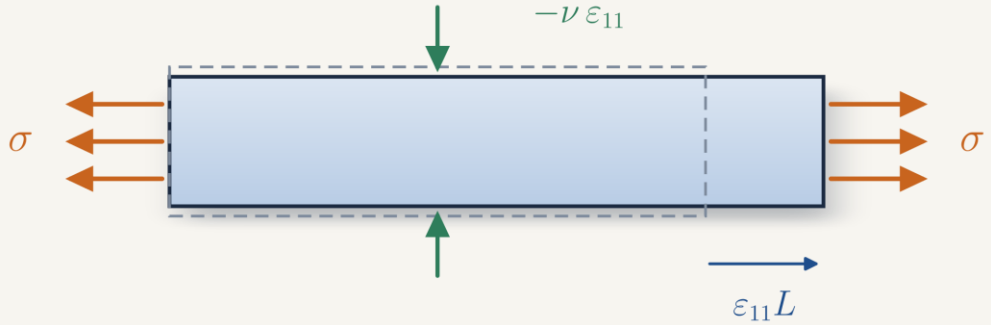
В декартовой системе ($\sigma_{ij} = P^{ij}$):

$$\sigma_{11} = \lambda\,\theta + 2\mu\,\varepsilon_{11}, \qquad \sigma_{12} = 2\mu\,\varepsilon_{12}, \qquad \theta = \varepsilon_{11} + \varepsilon_{22} + \varepsilon_{33}$$

При одноосном растяжении стержня — **модуль Юнга** E и **коэффициент Пуассона** ν:

$$\sigma = E\,\varepsilon_{11}, \qquad \varepsilon_{22} = \varepsilon_{33} = -\nu\,\varepsilon_{11}$$

$$E = \frac{\mu(3\lambda + 2\mu)}{\lambda + \mu}, \qquad \nu = \frac{\lambda}{2(\lambda + \mu)}$$



Стержень удлиняется вдоль оси и сужается поперёк

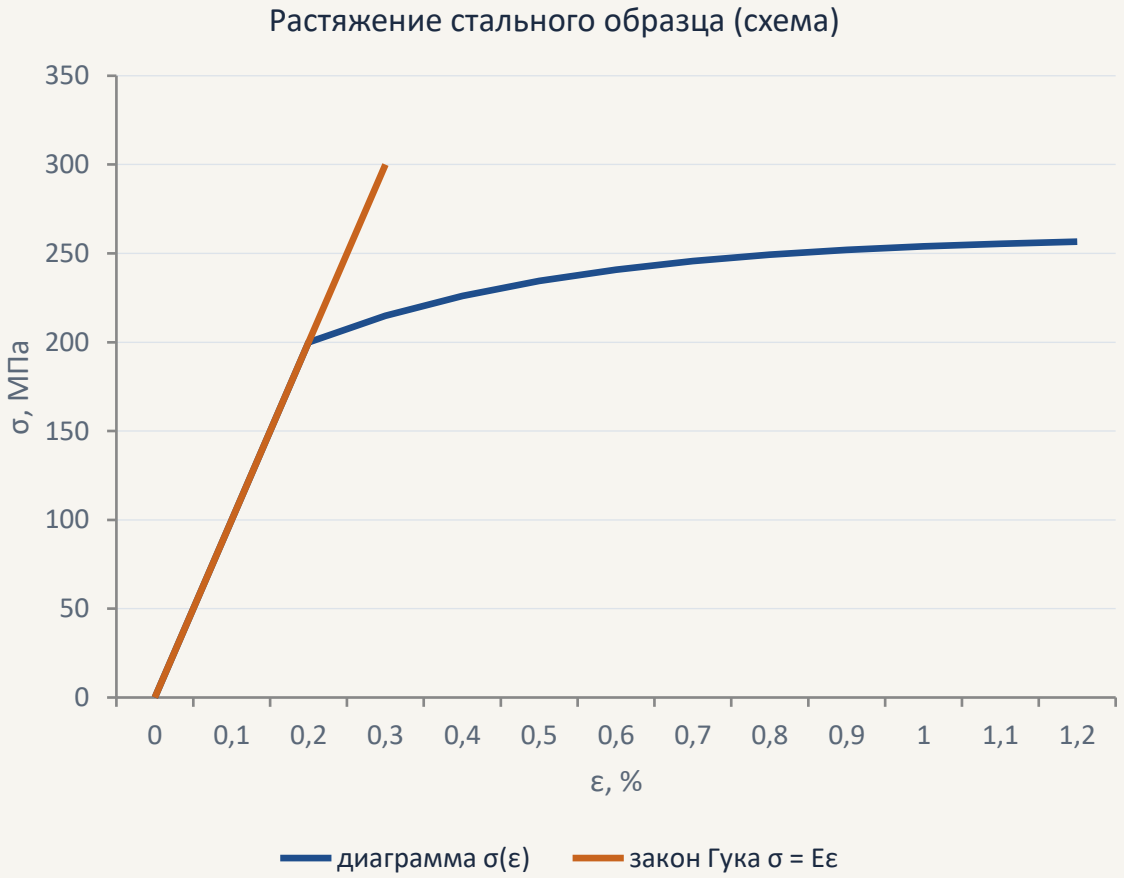
Материал	E, ГПа	ν
Сталь	≈ 200	≈ 0,29
Алюминий	≈ 70	≈ 0,33
Резина	≈ 0,01–0,1	≈ 0,49

Диаграмма растяжения: область применимости

Закон Гука описывает **начальный линейный участок** диаграммы растяжения: σ = Eε.

При больших напряжениях материал переходит в пластическое состояние, и линейная теория упругости неприменима.

Для сталей упругие деформации обычно не превышают 0,1–0,2 % — поэтому гипотеза малых деформаций хорошо выполняется.



Уравнение неразрывности и кинематика

Для линейного упругого тела, однородного в естественном состоянии ($\rho_0 = \text{const}$), уравнение неразрывности:

$$\rho = \rho_0\left(1 - J_1\right) = \rho_0\left(1 - \nabla_i w^i\right) \tag{15.3}$$

В силу малости перемещений и скоростей можно пренебречь конвективными членами:

$$\vec{v} = \frac{\partial \vec{w}}{\partial t} + (\vec{v}\cdot\nabla)\vec{w} \approx \frac{\partial \vec{w}}{\partial t}, \qquad \vec{a} \approx \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} = \frac{\partial^2 \vec{w}}{\partial t^2}$$

Малые перемещения

Переменные Лагранжа и Эйлера практически совпадают.

$\rho \approx \rho_0$

С точностью до малых первого порядка плотность постоянна.

Закон Гука через перемещения

С помощью тензора малых деформаций $\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2}(\nabla_i w_j + \nabla_j w_i)$ закон Гука (15.2) — связь между напряжениями и перемещениями:

$$P^{ij} = \lambda \nabla_k w^k \, g^{ij} + \mu \, g^{i\alpha} g^{j\beta} \left(\nabla_\alpha w_\beta + \nabla_\beta w_\alpha \right)$$

Дивергенция тензора напряжений:

$$\nabla_j P^{ij} = (\lambda + \mu) \, \nabla^i \nabla_k w^k + \mu \, \Delta w^i$$

(λ + μ) grad div w

отклик на изменение объёма

μ Δw

отклик на сдвиговые деформации

Уравнения Ламе

Подставляя дивергенцию в уравнение динамики, получаем **уравнения Ламе** — уравнения движения упругого тела в перемещениях:

$$\rho_0 \frac{\partial^2 w^i}{\partial t^2} = \rho_0 F^i + (\lambda + \mu)\, \nabla^i \nabla_k w^k + \mu\, \Delta w^i \tag{15.4}$$

В векторной форме:

$$\rho_0 \frac{\partial^2 \vec{w}}{\partial t^2} = \rho_0 \vec{F} + (\lambda + \mu)\, \operatorname{grad} \operatorname{div} \vec{w} + \mu\, \Delta \vec{w}$$

Неизвестные

три компоненты вектора перемещения w^i; ρ_0 и F^i заданы

Предположение

деформации малы; ρ можно заменить на ρ_0

Уравнение (15.3)

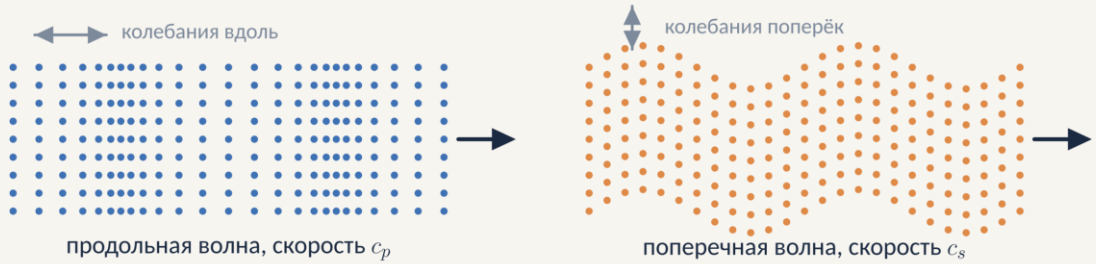
в линейной теории можно не рассматривать

Следствие: упругие волны

Без массовых сил уравнения Ламе допускают решения в виде волн двух типов: **продольные** (изменение объёма) и **поперечные** (сдвиг). Их скорости:

$$c_p = \sqrt{\frac{\lambda + 2\mu}{\rho_0}}, \qquad c_s = \sqrt{\frac{\mu}{\rho_0}}$$

Для стали: $c_p \approx 5{,}9$ км/с, $c_s \approx 3{,}2$ км/с. На различии скоростей основаны сейсморазведка и ультразвуковая дефектоскопия.





Замкнутая система линейной теории упругости

Уравнение	Формула	Число уравнений
Уравнения движения	$\rho_o\, \partial^2 w/\partial t^2 = \rho_o F + \operatorname{div} P$	3
Закон Гука	$P_{ij} = \lambda J_1 g_{ij} + 2\mu\varepsilon_{ij}$	6
Деформации — перемещения	$\varepsilon_{ij} = \tfrac{1}{2}(\nabla_i w_j + \nabla_j w_i)$	6
Неразрывность	$\rho = \rho_o(1 - \nabla_i w^i)$	1 (можно не учитывать)
Итог — уравнения Ламе	$\rho_o\, \partial^2 w/\partial t^2 = \rho_o F + (\lambda+\mu)\ \mathrm{grad}\ \mathrm{div}\ w + \mu\Delta w$	3 уравнения для 3 неизвестных w^i

Заключение и вопросы для самоконтроля

Выводы

1. Упругая среда: деформация описывается ε_{ij}, есть естественное состояние, P^{ij} — взаимно однозначная функция ε_{ij}.
2. Линейное упругое тело — напряжения линейны по деформациям; классическое — ещё однородно и изотропно.
3. Закон Гука: $P_{ij} = \lambda J_1 g_{ij} + 2\mu\varepsilon_{ij}$; λ, μ — постоянные Ламе.
4. Через перемещения: $\operatorname{div} P = (\lambda + \mu)\operatorname{grad}\operatorname{div} w + \mu\Delta w$.
5. Уравнения Ламе (15.4) — замкнутая система для трёх компонент перемещения.

Контрольные вопросы

1. Какая сплошная среда называется упругой?
2. Что такое естественное состояние упругой среды?
3. Чем линейное упругое тело отличается от классического?
4. Запишите закон Гука для изотропной среды. Что такое постоянные Ламе?
5. Как связаны λ и μ с модулем Юнга и коэффициентом Пуассона?
6. Выведите выражение для дивергенции тензора напряжений через перемещения.
7. Запишите уравнения Ламе. При каких предположениях они получены?
8. Какие типы волн существуют в упругом теле и какова их скорость?