Казахский национальный университет имени аль-Фараби

Факультет механико-математический

Кафедра механики

Образовательная программа «6B05403 – Механика»

Дисциплина: Введение в механику сплошной среды

Лекция № 3

Методы изучения движения сплошной среды

Преподаватель: Туралина Динара Елеусизовна

к.ф.-м.н., ассистент-профессор

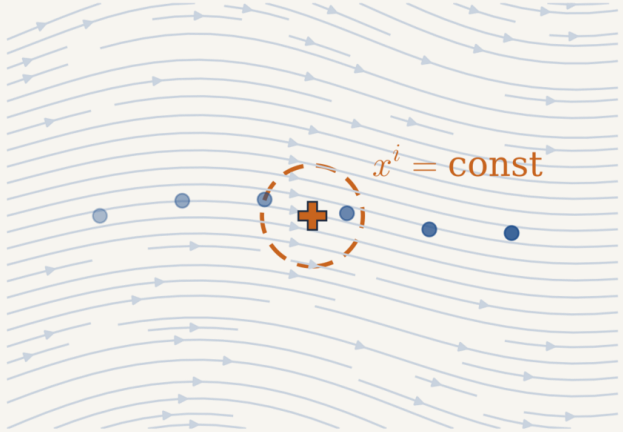
Алматы, 2026 год

Две точки зрения на движение среды

Лагранж: следим за частицей



Эйлер: наблюдаем точку пространства



Метод Лагранжа

Объект изучения — сама движущаяся среда, её отдельные частицы как материальные точки.

Переменные Лагранжа:

$$\xi^1,\ \xi^2,\ \xi^3,\ t$$

Метод Эйлера

Объект изучения — неподвижное пространство, заполненное движущейся средой.

Переменные Эйлера:

$$x^1,\ x^2,\ x^3,\ t$$

Метод Лагранжа. Вектор перемещения

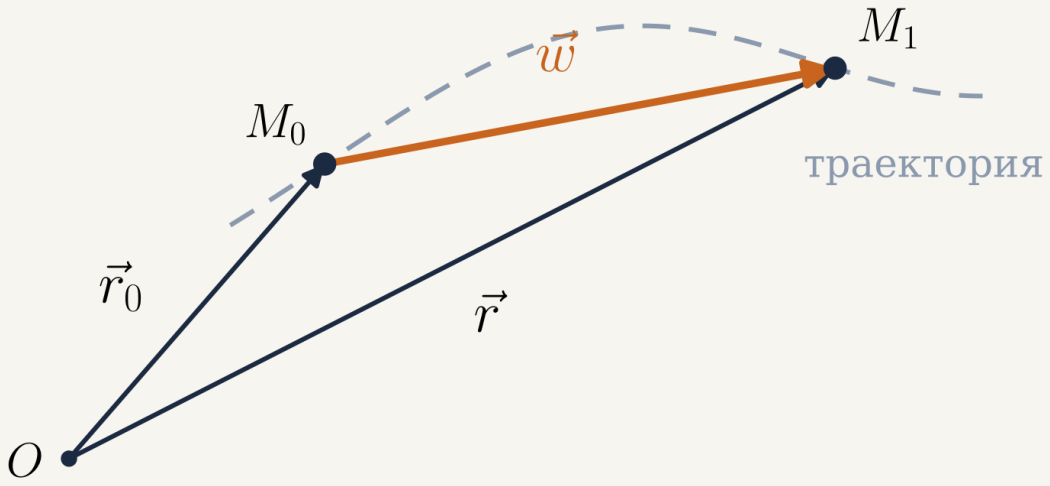
Изучаются изменения тензорных характеристик в **фиксированной частице** ξ^k с течением времени и их изменения при переходе от частицы ξ^k к частице $\xi^k + d\xi^k$ в фиксированный момент. Характеристики — функции ξ^k и t.

Частица занимает положения M_0 и M_1 в моменты t_0 и t_1 (радиус-векторы $\mathbf{r}_0$ и $\mathbf{r}$). **Вектор перемещения**:

$$\vec{w} = \vec{r} - \vec{r}_0$$

Его компоненты связаны с координатами частицы:

$$w^i = x^i - x_0^i \qquad \text{или} \qquad x^i = x_0^i + w^i$$



Скорость частицы в переменных Лагранжа

Скорость — отношение перемещения *d***r** частицы ко времени *dt* при фиксированных ξ^k:

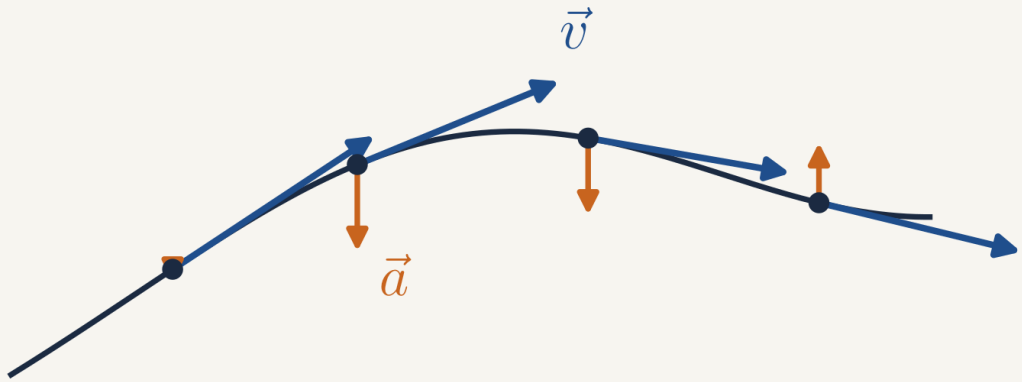
$$\vec{v} = \frac{\partial \vec{r}}{\partial t} = v^i \, \vec{\mathfrak{Э}}_i$$

$$v^i(\xi^k, t) = \frac{\partial x^i}{\partial t} = \frac{\partial w^i}{\partial t} \tag{3.1}$$

Ковариантные компоненты и модуль скорости:

$$v_j = g_{ji} \, v^i$$

$$v = \sqrt{g_{ji} \, v^i v^j} = \sqrt{g^{\ell m} \, v_\ell \, v_m}$$



Скорость **v** направлена по касательной к траектории; ускорение **a** характеризует её изменение

Ускорение частицы в переменных Лагранжа

Ускорение — индивидуальная производная по времени от скорости частицы:

$$\vec{a} = \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} = a^i \, \vec{\mathfrak{Э}}_i$$

Контравариантные компоненты

$$a^i = \frac{\partial v^i}{\partial t} + v^j v^k \, \Gamma^i_{jk} \tag{3.2}$$

Ковариантные компоненты

$$a_\ell = \frac{\partial v_\ell}{\partial t} - v_j v^k \, \Gamma^j_{\ell k} \tag{3.3}$$

Через перемещения

$$a^i = \frac{\partial^2 w^i}{\partial t^2} + \frac{\partial w^j}{\partial t}\frac{\partial w^k}{\partial t} \, \Gamma^i_{jk} \tag{3.4}$$

Декартова система (Γ = 0)

$$a^i = \frac{\partial v^i}{\partial t} = \frac{\partial^2 w^i}{\partial t^2}$$

Слагаемые с символами Кристоффеля появляются потому, что вдоль траектории меняется сам базис криволинейной системы.

Метод Эйлера. Поля характеристик

Изучаются изменения характеристик в **фиксированной точке пространства** x^i с течением времени и при переходе к соседним точкам. Характеристики — функции x^i и t, то есть **поля**.

Поле вектора перемещений:

$$\vec{w} = w^i\,\vec{\mathfrak{Э}}_i, \qquad w^i(x^k, t) = x^i - x_0^i$$

Стационарное поле

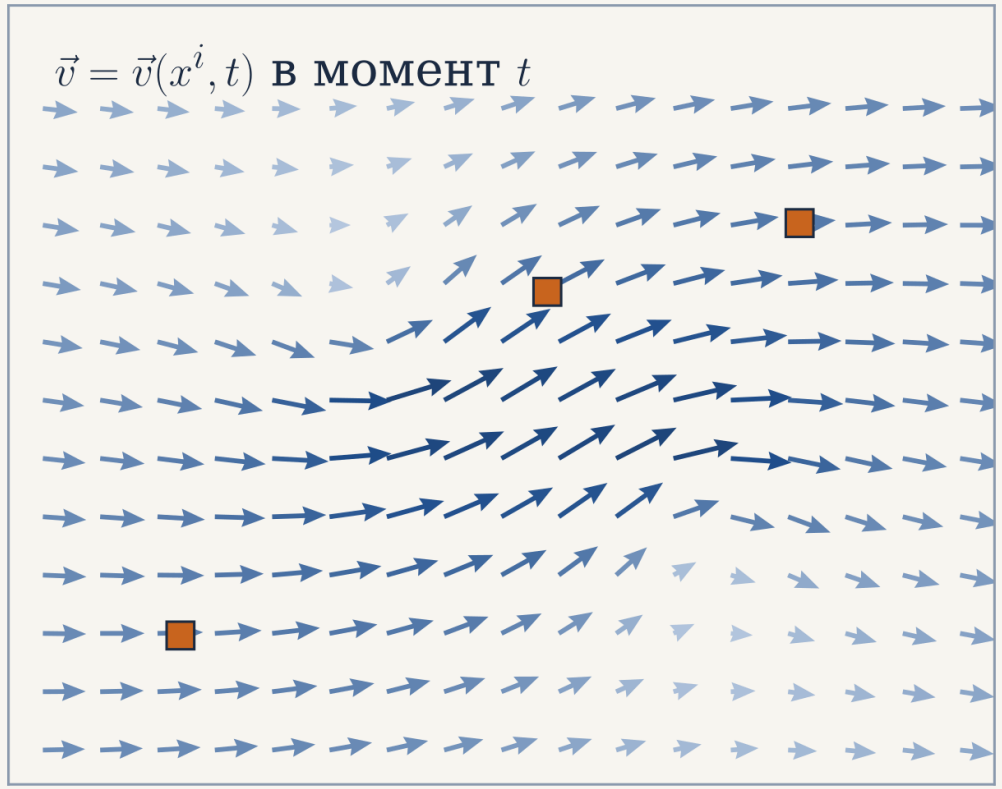
$$\vec{v} = \vec{v}(x^i)$$

движение **установившееся**

Нестационарное поле

$$\vec{v} = \vec{v}(x^i, t)$$

движение **неустановившееся**



Поле скоростей в момент t; квадраты — неподвижные точки наблюдения

Индивидуальная производная по времени

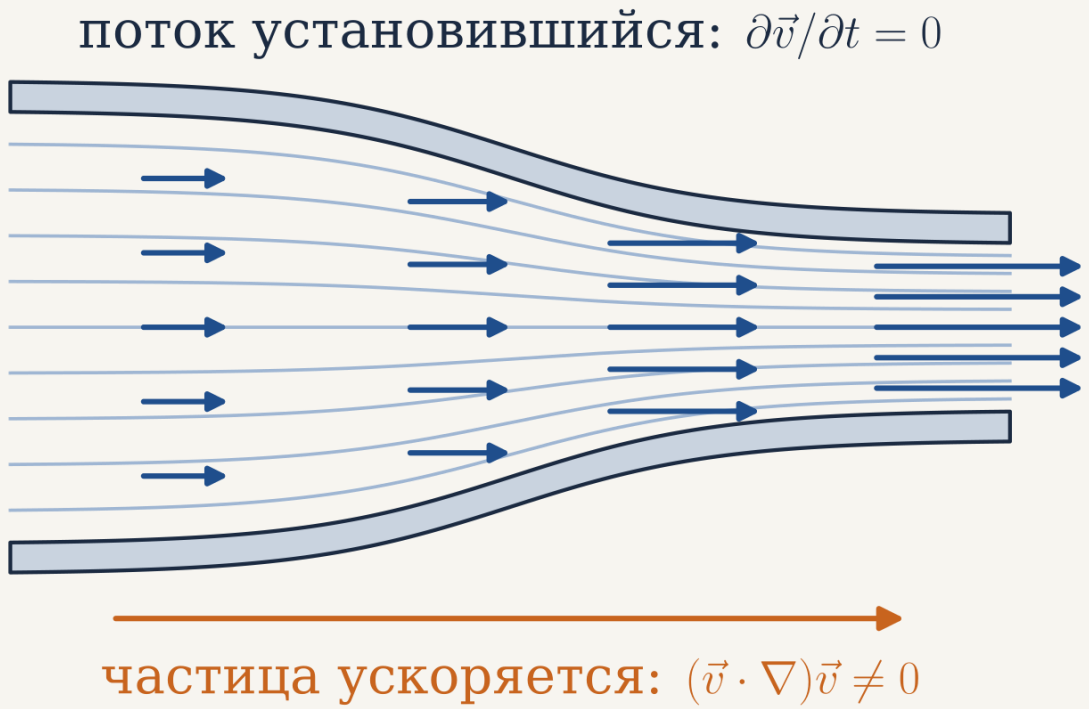
Ускорение частицы в переменных Эйлера — индивидуальная (полная) производная от скорости:

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \underbrace{\frac{\partial \vec{v}}{\partial t}}_{\text{локальное}} + \underbrace{(\vec{v}\cdot\nabla)\,\vec{v}}_{\text{конвективное}}$$

$$a^i = \frac{dv^i}{dt} = \frac{\partial v^i}{\partial t} + v^j\,\nabla_j v^i$$

Локальное ускорение ∂**v**/∂t — изменение скорости в фиксированной точке пространства.

Конвективное ускорение (**v**·∇)**v** — изменение скорости при переходе от точки к соседним точкам.



Взаимосвязь методов Лагранжа и Эйлера

От переменных Лагранжа к переменным Эйлера

1. Известны **w**, **v**, T, x^i как функции ξ^k, t.

2. Разрешаем закон движения относительно ξ^k — это возможно, так как J ≠ 0:

$$x^i = x^i(\xi^k, t) \xrightarrow{J\neq 0} \xi^k = \xi^k(x^i, t)$$

3. Подставляем ξ^k в формулы и получаем поля:

$$\vec{v}(\xi^k, t) \longrightarrow \vec{v}\big(\xi^k(x^i, t), t\big) = \vec{v}(x^i, t)$$

От переменных Эйлера к переменным Лагранжа

1. Известно поле скоростей $v^i(x^k, t)$.

2. Интегрируем систему трёх обыкновенных дифференциальных уравнений:

$$\frac{dx^i}{dt} = v^i\big(x^1, x^2, x^3, t\big), \qquad i = 1, 2, 3$$

3. Постоянные интегрирования определяются начальными условиями и индивидуализируют частицу — это переменные Лагранжа:

$$x^i = x^i(t, c_1, c_2, c_3), \qquad c_k \leftrightarrow \xi^k$$

Линии тока

Линия тока — линия, касательная к которой в каждой точке в данный момент t совпадает с направлением вектора скорости.

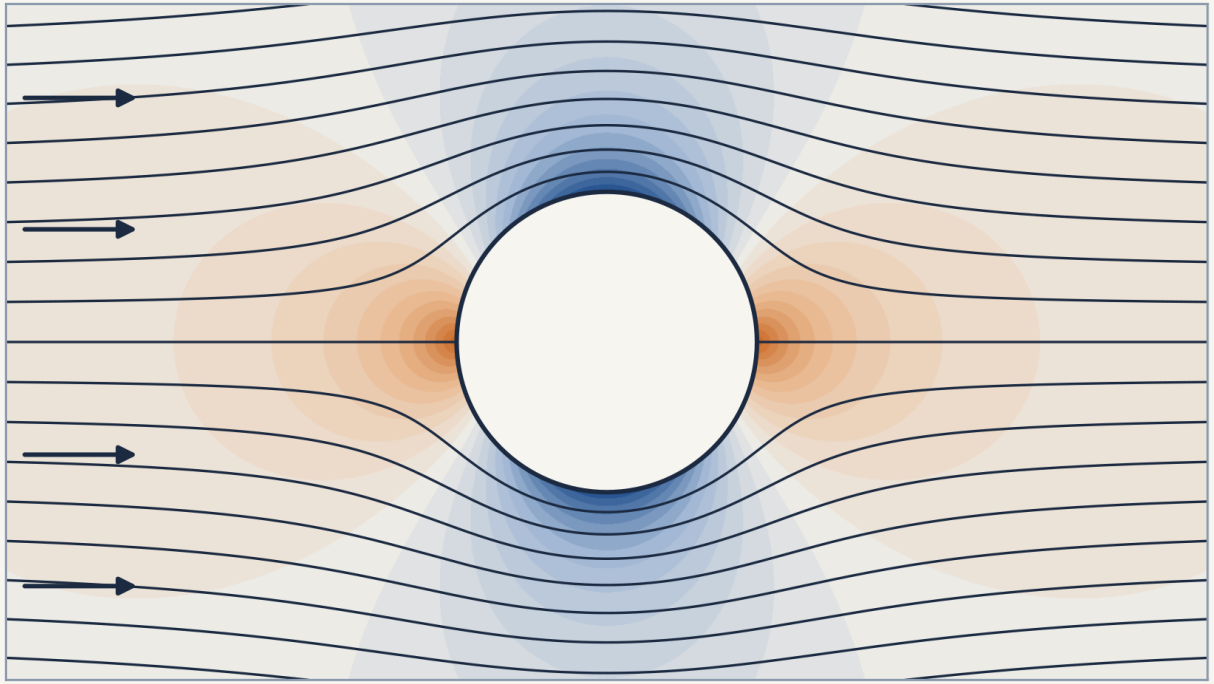
Элемент $d\mathbf{r} = dx^i \mathbf{э}_i$ линии тока параллелен скорости **v**:

$$d\vec{r} = d\lambda\, \vec{v}$$

В компонентах — дифференциальные уравнения линий тока:

$$\frac{dx^1}{v^1} = \frac{dx^2}{v^2} = \frac{dx^3}{v^3} = d\lambda \qquad (3.5)$$

При интегрировании время t рассматривается как постоянный параметр.



Линии тока при обтекании кругового цилиндра (потенциальное течение); цвет — модуль скорости

Линии тока и траектории

Линии тока (3.5): t — параметр

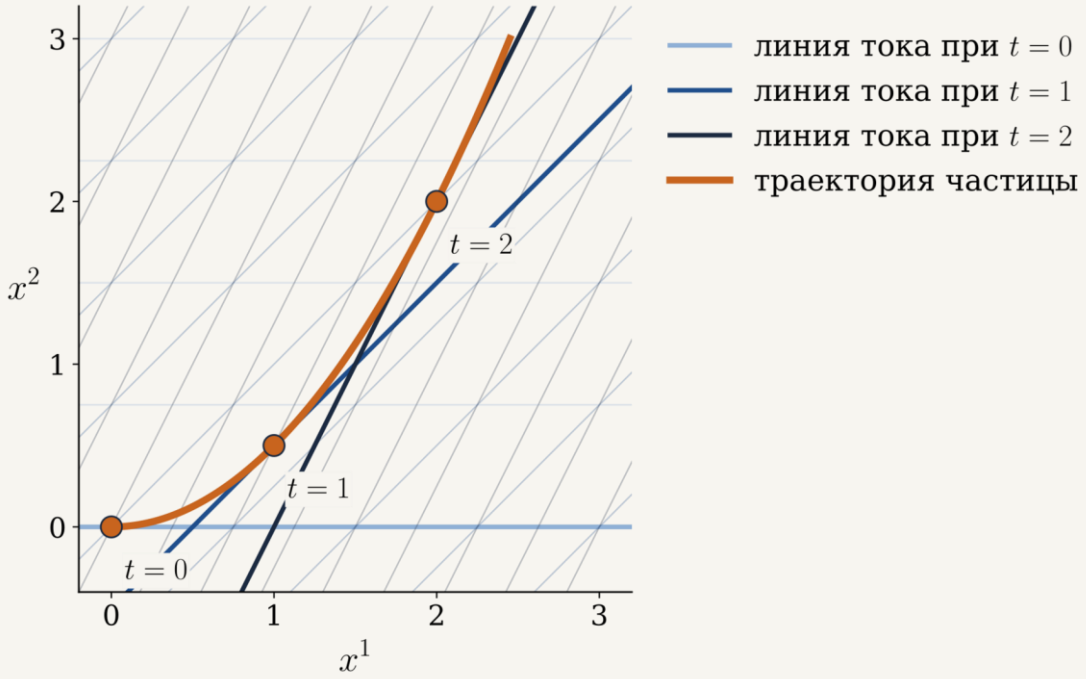
$$\frac{dx^i}{d\lambda} = v^i\left(x^1, x^2, x^3, t\right), \quad t = \text{const}$$

Траектории (3.6): t — переменная

$$\frac{dx^i}{dt} = v^i\left(x^1, x^2, x^3, t\right)$$

В **неустановившемся** движении линии тока и траектории, вообще говоря, различны: семейство линий тока меняется со временем.

В **установившемся** движении t не входит в правые части, и **линии тока совпадают с траекториями**.



Пример: $v^1 = 1$, $v^2 = t$. Линии тока $x^2 = t \cdot x^1 + C$ — прямые, меняющие наклон; траектория $x^2 = (x^1)^2/2$ — парабола

Вихрь скорости. Вихревые линии и трубки

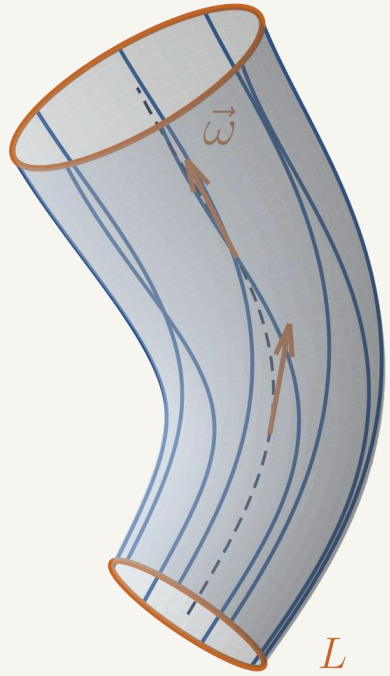
Для поля **вектора вихря** скорости

$$\vec{\omega} = \frac{1}{2}\,\mathrm{rot}\,\vec{v}$$

вводятся понятия вихревых линий и трубок. **Вихревая линия** — линия, касательная к которой в каждой точке совпадает с направлением вектора вихря **ω**:

$$\frac{dx^1}{\omega^1} = \frac{dx^2}{\omega^2} = \frac{dx^3}{\omega^3} = d\lambda \tag{3.7}$$

Вихревая трубка — поверхность, образованная вихревыми линиями, проведёнными через каждую точку замкнутого контура L.



Если **ω** = 0 во всей области, движение называется **безвихревым** (потенциальным).

Заключение и вопросы для самоконтроля

Выводы

1. Метод Лагранжа изучает движение отдельных частиц; переменные Лагранжа — ξ^k, t.
2. Метод Эйлера изучает поля характеристик в неподвижном пространстве; переменные Эйлера — x^i, t.
3. Ускорение в переменных Эйлера — сумма локального и конвективного ускорений.
4. Переход между описаниями: обращение закона движения ($J \neq 0$) или интегрирование $dx^i/dt = v^i$.
5. Линии тока совпадают с траекториями только в установившемся движении.

Контрольные вопросы

1. В чём различие подходов Лагранжа и Эйлера? Что называют переменными Лагранжа и Эйлера?
2. Дайте определения вектора перемещения и вектора скорости в переменных Лагранжа.
3. Почему в криволинейных координатах формулы ускорения содержат символы Кристоффеля?
4. Какое поле скоростей называют стационарным, а движение — установившимся?
5. Что такое локальное и конвективное ускорения? Приведите пример, где локальное ускорение равно нулю, а конвективное — нет.
6. Как перейти от переменных Лагранжа к переменным Эйлера и обратно?
7. Запишите уравнения линий тока и траекторий. Когда они совпадают?
8. Что называют вихревой линией и вихревой трубкой?