ӘЛ-ФАРАБИ АТЫНДАҒЫ ҚАЗАҚ ҰЛТТЫҚ УНИВЕРСИТЕТІ
Физика-техникалық факультеті

ЭЛЕКТР ЖӘНЕ МАГНЕТИЗМ

Профессор Досболаев М.Қ.
merlan@physics.kz

Электр өрісі

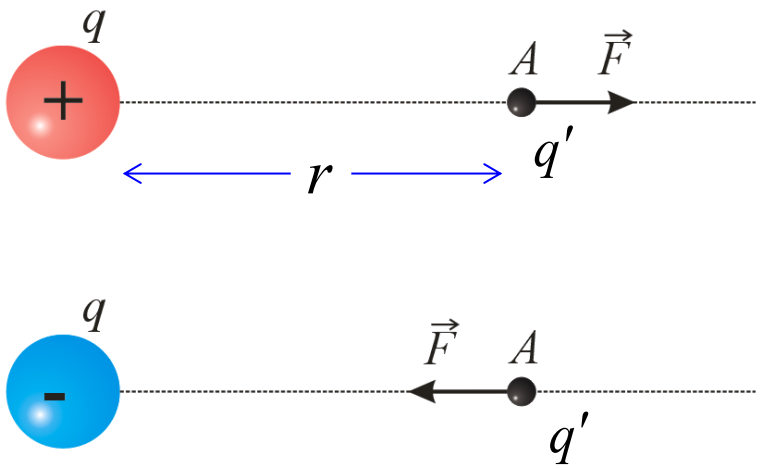
Электр өрісі дегеніміз зарядтар тудыратын, массамен энергияға ие материяның (заттан бөлек) ерекше бір формасы, осы орта арқылы зарядтар, немесе басқада зарядталған денелер өзара әсерлеседі. Оны айқындау үшін немесе модельдік тәжірибелік зерттеулер үшін нүктелік электр заряды қолданылады.

Нүктелік заряд - сызықтық өлшемдері өзара әсерлесетін басқа зарядталған денелерге дейінгі арақашықтықпен салыстырғанда өте кіші денеге шоғырланған оң заряд. Нүктелік зарядта материалдық нүкте секілді физикалық абстрактілі.

Нүктелік зарядқа әсер ететін күш

q заряд тарапынан $q`$ нүктелік зарядқа әсер ететін Кулондық күш (9 сурет):

$$\vec{F} = k\frac{qq`}{r^3}\vec{r}. (6)$$



9 сурет

Егер q заряд өрісінің A нүктесіне шамалары әртүрлі q_1, q_2 және q_3 зарядтарды алма кезек орналастыратын болсақ, оларға шамалары әртүрлі F_1, F_2 және F_3 күштер әсер етеді, бірақ олардың қатынастары өзара тең болады, $\frac{F_1}{q_1} = \frac{F_2}{q_2} = \frac{F_3}{q_3} =$ const, *бұл қатынас осы нүктедегі өріс кернеулігін, $\vec{E}$ векторнын береді және ол әрқашан тұрақты*. Бұл, кез-келген нүктедегі өріс сипаттамасы.*

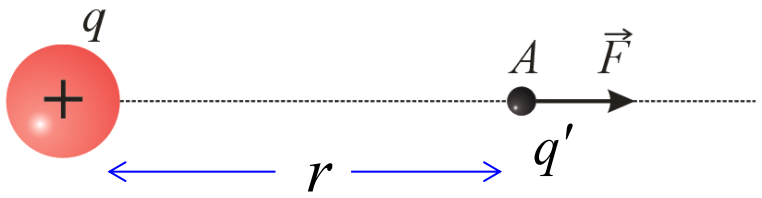
$\vec{r}$ – радиус вектор

1. Савельев, 2. Детлаф

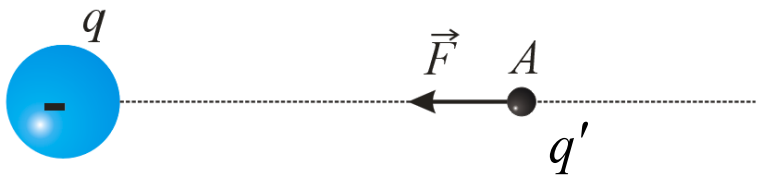
Электр өрісінің кернеулігі. Нүктелік заряд өрісі

Электр заряды кеңістіктің әрбір нүктесінде электр өрісін тудырады, ал $\vec{E}$ векторы сол өрістің күштік сипаттамасы және *электр өрісінің кернеулігі* деп аталады:

$$\vec{F} = q` \left[k \frac{q}{r^3} \vec{r} \right]. (6)$$



$$k \frac{q}{r^3} \vec{r} = \vec{E} = \lim_{q` \to 0} \frac{\vec{F}}{q`} \left[\frac{\text{Н}}{\text{Кл}} = \frac{\text{В}}{\text{м}} \right]. (7)$$



9 сурет

Нүктелік заряд (*A* нүктесіндегі) өрісі. Кулон заңының өрістік формасы:

$$\vec{E} = k \frac{q}{r^3} \vec{r}. (8)$$

$$E = k \frac{q}{r^2}. (9)$$

$\vec{r}$ – радиус вектор

1. Савельев, 2. Кашин

Электр статикалық өріс кернеулігі

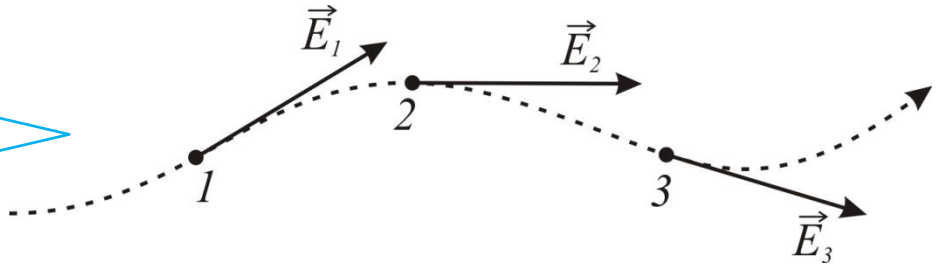
Сонымен, қозғалмайтын зарядталған бөлшектер арасындағы кулондық әсерлесу, өздері тудырған электр статикалық өріс арқылы жүзеге асады.

Электр статикалық өріс кернеулігі, осы өрістің қандай да бір нүктесіне орналастырылған бірлік оң зарядқа әсер ететін күшті анықтайтын векторлық физикалық шама (электр өрісінің күштік сипаты).

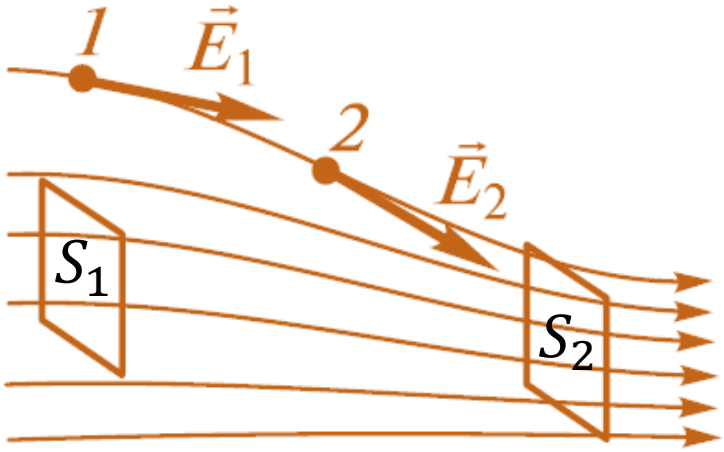
Бұл өріс уақыт бойынша өзгермейді, яғни стационар. Электр өрісінің басқа өрістерден ерекшелігі, ол қозғалмайтын, сол сияқты қозғалыстағы зарядтарғада әсер береді.

Электр өрісінің күш сызықтары (графикалық, геометриялық кескінделуі)

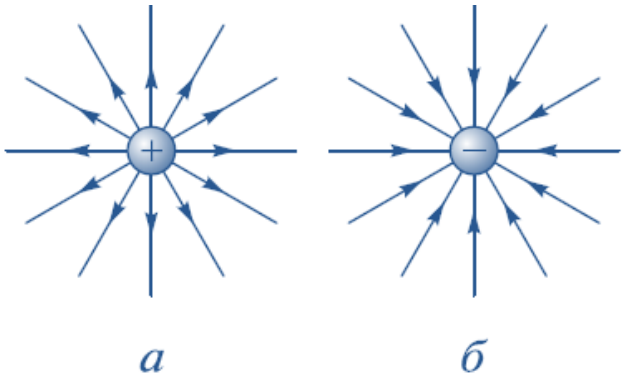
$$\vec{E}(\vec{r}) = k\frac{q}{r^3}\vec{r}. \quad (8)$$



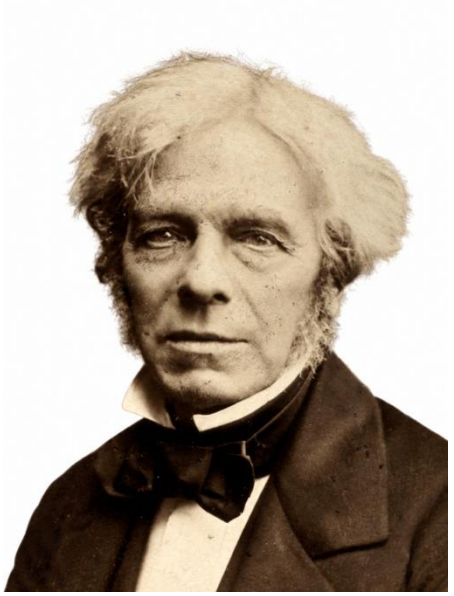
10 сурет



11 сурет. $S_1 = S_2$



12 сурет



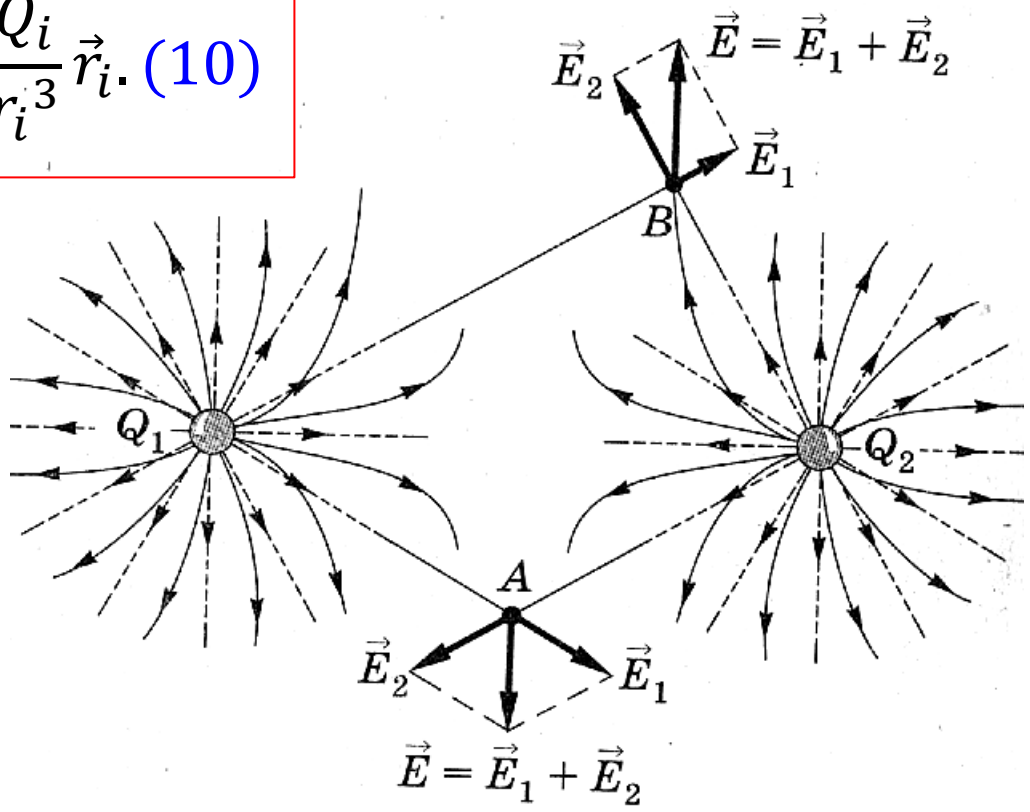
Майкл Фарадéй
(1791-1867)

Кеңістіктің әрбір нүктесінде кернеулік векторының нақты анықталған бағыты болғандықтан, күш сызықтары еш жерде қиылыспайды.

Электр статикалық өрістердің суперпозициясы принципі

Зарядтар жүйесі тудыратын қорытқы электр өрісінің кернеулігі, осы нүктедегі әрбір заряд тудыратын *өріс кернеуліктерінің геометриялық суммасына* тең:

$$\vec{E} = \sum \vec{E}_i = k \sum \frac{Q_i}{{r_i}^3} \vec{r}_i . \quad (10)$$

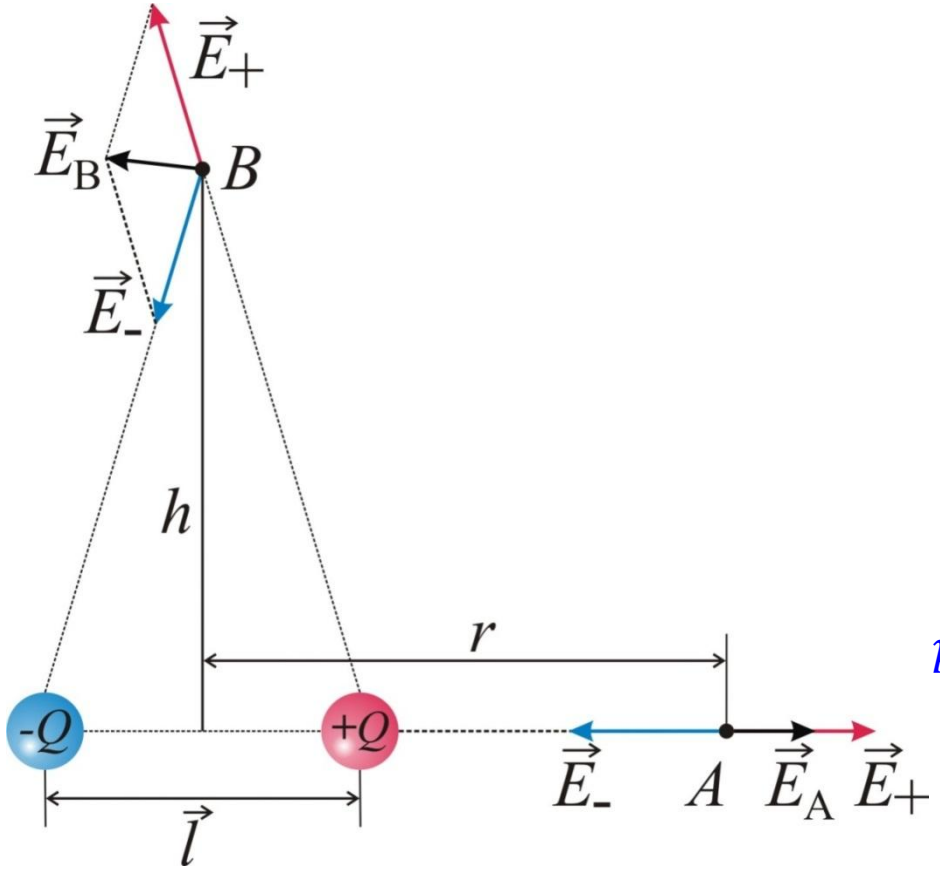


$\vec{E}_i - r_i$ қашықтықтағы Q_i заряд тудырған өріс кернеулігі

13 сурет

Диполь өрісі

Диполь – шамалары тең, таңбалары қарама-қарсы, бір-бірінен бақылау нүктесіне дейінгі қашықтықпен салыстырғанда өте аз l қашықтықта орналасқан екі заряд.



14 сурет

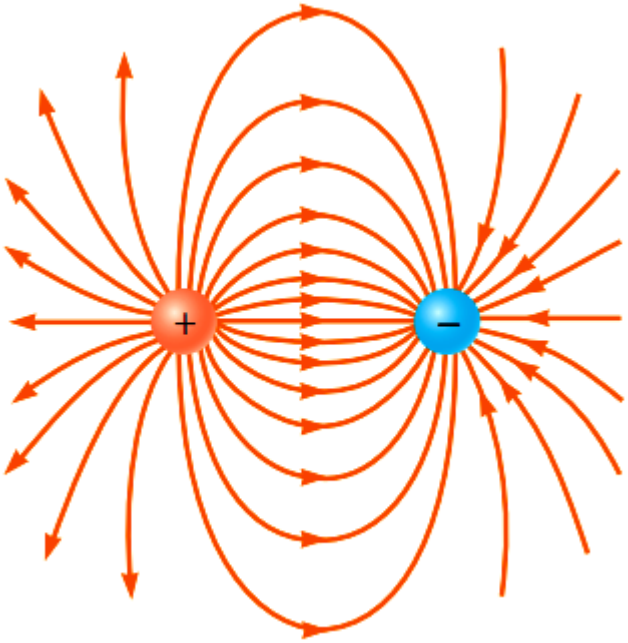
$$E_B = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{p}{h^3} \quad (11)$$

$$E_A = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{2p}{r^3} \quad (12)$$

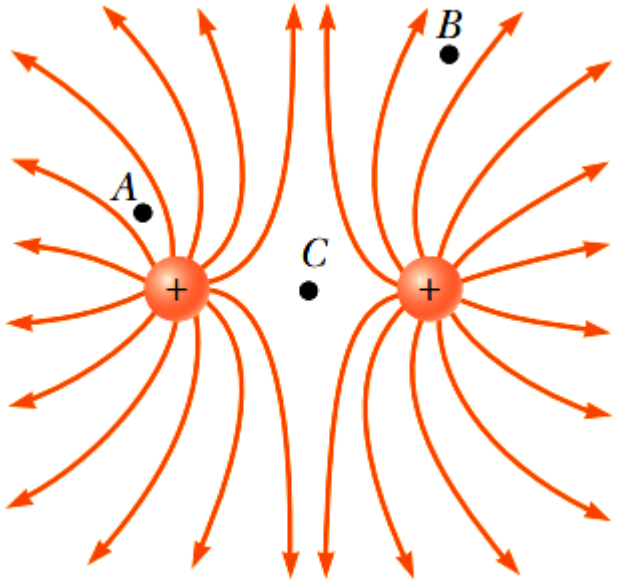
$p = Ql$ – дипольдің электрлік моменті

l – терістен оң зарядқа жүргізілген ұзындық векторы; Q – зарядтардың абсолюттік мәні

Электр өрісінің күш сызықтары (графикалық, геометриялық кескінделуі)



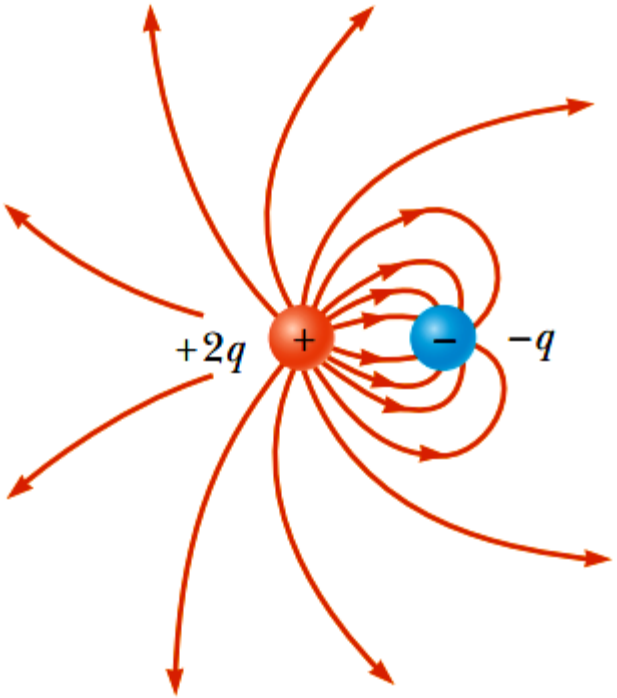
15 сурет. Диполь



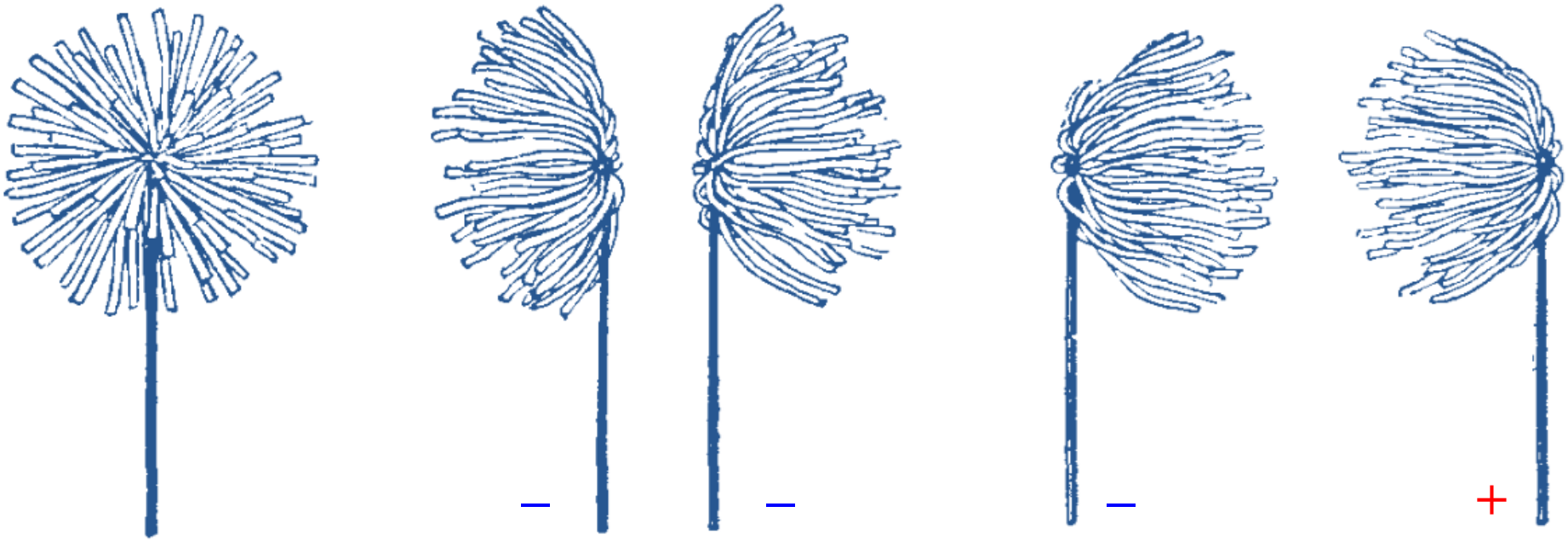
16 сурет

- Өріс өзін тудырған зарядқа әсер бермейді және кеңістіктегі өрістер бір-бірімен әсерлеспейді.

Электр өрісінің күш сызықтары (графикалық, геометриялық кескінделуі)



Сұлтан шашақпен көрнекі эксперимент



а) *ә*) *б*)

А.А. Покровский

Зарядтардың таралуы

Макроскопиялық жүйелерде зарядтардың таралуын үздіксіз деп қарастырамыз. Зарядталған денені шексіз аз dq заряд элементтерінің жиынтығы ретінде қарастыруға болады. Әрбір dq элементі бақылау нүктесінде $d\vec{E}$ элементар электр өрісін тудырады.

$$d\vec{E} = k\frac{dq}{r^3}\vec{r} \quad \rightarrow \quad \vec{E} = \int d\vec{E} \quad (13)$$

$$\tau = \frac{\mathrm{d}q}{\mathrm{d}l} \ (14) \qquad \sigma = \frac{\mathrm{d}q}{\mathrm{d}S} \ (15) \qquad \rho = \frac{\mathrm{d}q}{\mathrm{d}V} \ (16)$$

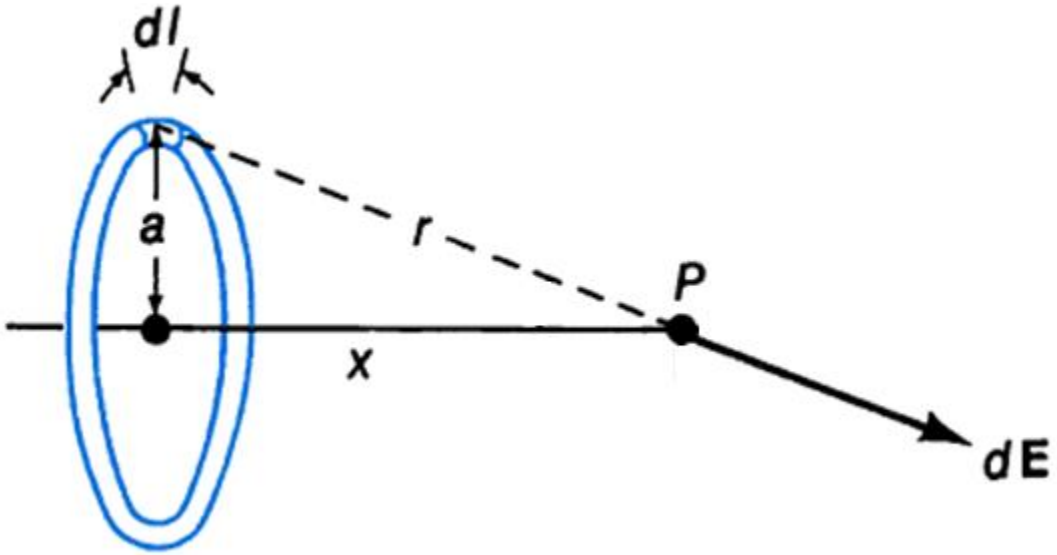
$$\mathrm{d}q = \rho \mathrm{d}V \ (16)$$

$$d\vec{E} = k\frac{\rho \mathrm{d}V}{r^3}\vec{r} \quad \rightarrow \quad \vec{E} = k\int \frac{\rho \mathrm{d}V}{r^3}\vec{r} \ (17)$$

ρ – зарядтардың көлемдік тығыздығы

Мысал

Радиусы a болатын жіңішке сақинада Q заряды біркелкі, үздіксіз таралған болсын. Оның P нүктесінде тудырған қорытқы өріс кернеулігі қалай анықталады?



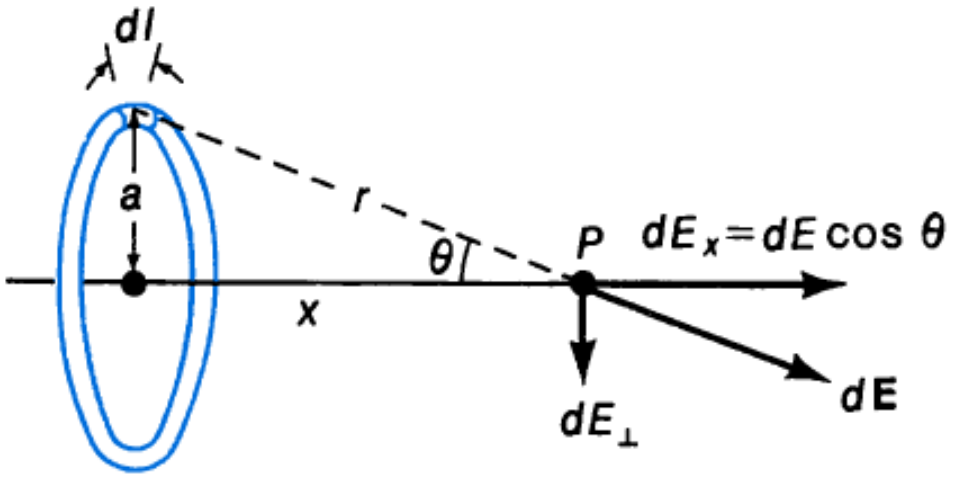
$$dE = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{dQ}{r^2}, \quad dQ = Q\,(dl/2\pi a) \longrightarrow dE = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q dl}{r^2 2\pi a}.$$

dl – сақинаның элементар ұзындығы; $2\pi a$ – сақинаның толық ұзындығы

Джанколи

Мысал

Радиусы a жіңішке сақинада Q заряды біркелкі, үздіксіз таралған болсын. Оның P нүктесінде тудырған қорытқы өріс кернеулігі қалай анықталады?



$$dE = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Qdl}{r^2 2\pi a}.$$

$$E = \int dE_x = \int dE\cos\theta = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{1}{2\pi a}\int \frac{dl}{r^2}\cos\theta\,.$$

Тік бұрышты үшбұрыш

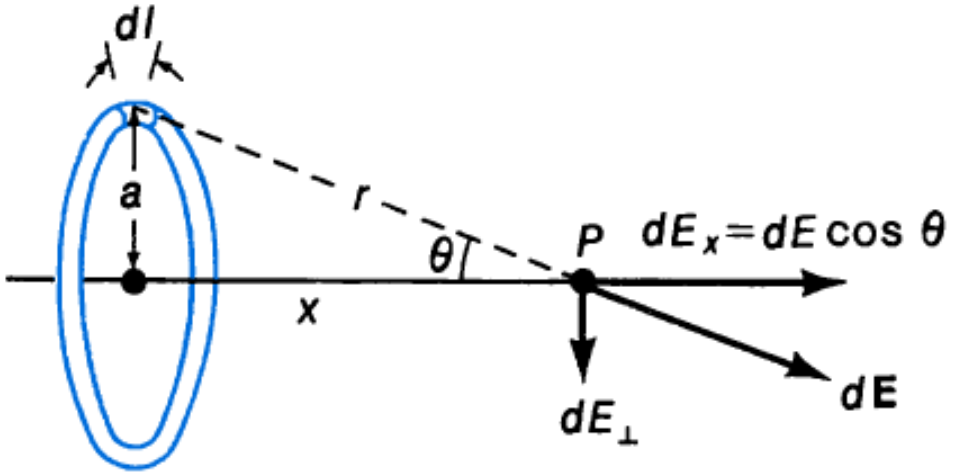
$$\cos\theta = x/r,$$

Пифагор теоремасы

$$r = (x^2 + a^2)^{1/2}$$

Мысал

Радиусы a жіңішке сақинада Q заряды біркелкі, үздіксіз таралған болсын. Оның P нүктесінде тудырған қорытқы өріс кернеулігі қалай анықталады?



$$E = \frac{Q}{(4\pi\varepsilon_0)(2\pi a)} \frac{x}{(x^2 + a^2)^{3/2}} \int_0^{2\pi a} dl = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{Qx}{(x^2 + a^2)^{3/2}}.$$

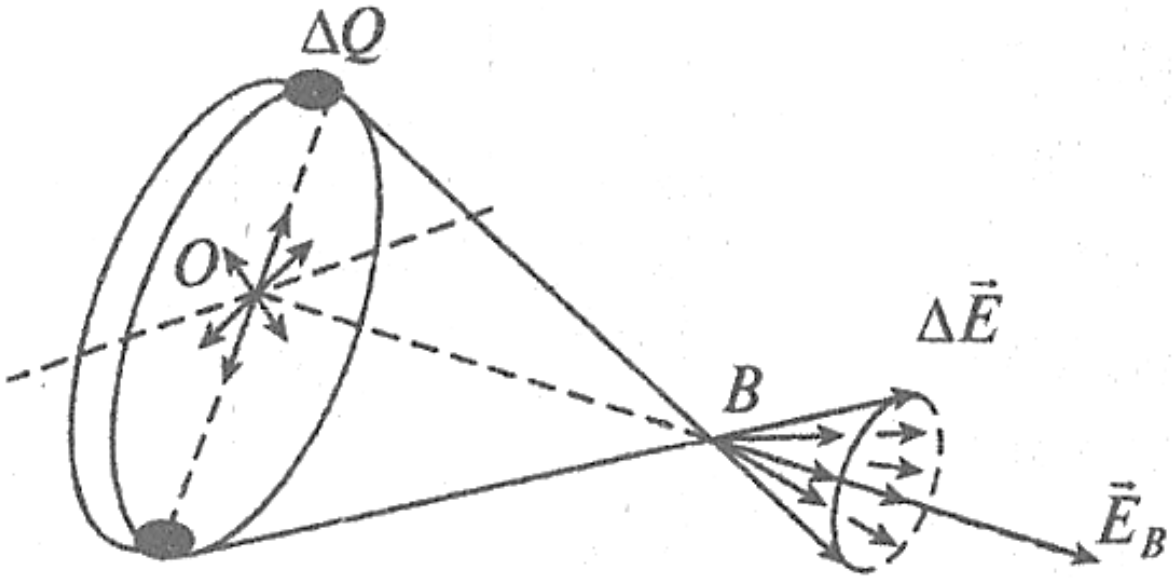
$$(x \gg a) \longrightarrow E = Q/4\pi\varepsilon_0 x^2.$$

dl – сақинаның элементар ұзындығы; $2\pi a$ – сақинаның толық ұзындығы

Джанколи

Мысал

Біркелкі зарядталған сақина центріндегі және өсіндегі өріс кернеулігі қалай анықталады?

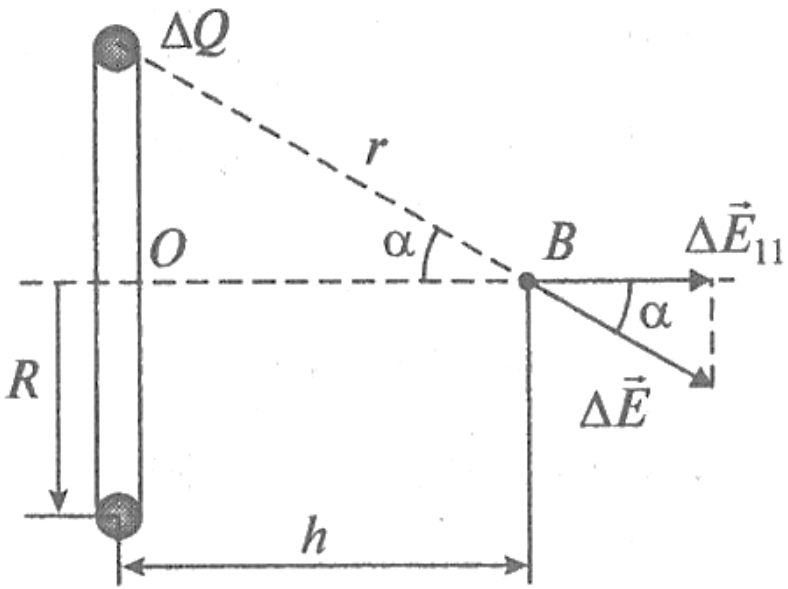


$$E_O = 0.$$

ΔQ – элементар заряд

Мысал

Біркелкі зарядталған сақина центріндегі және өсіндегі өріс кернеулігі қалай анықталады?



Пифагор теоремасына сай

$$\Delta E = \frac{\Delta Q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}, \qquad r = \sqrt{R^2 + h^2}.$$

Тік бұрышты үшбұрыш заңы

$$\Delta E_{11} = \Delta E \cos\alpha, \qquad \cos\alpha = \frac{h}{r}.$$

$$E = \sum \Delta E_{11}.$$

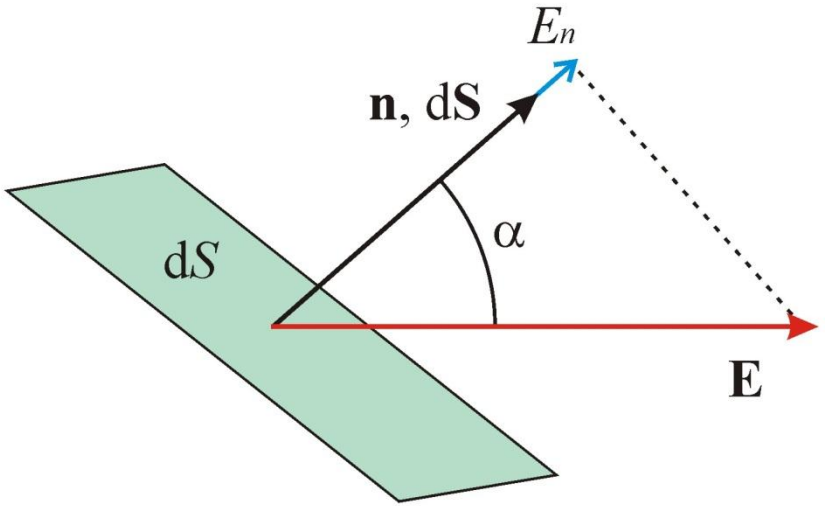
$$E = \frac{Qh}{4\pi\varepsilon_0 (R^2 + h^2)^{\frac{3}{2}}} \quad \frac{\text{Н}}{\text{Кл}}.$$

ΔQ – элементар заряд

Тұйық бет арқылы $\vec{E}$ векторының ағыны

Кеңістікте орналасқан dS элементар беттен оның $\vec{n}$ нормалінен қандайда бір α бұрышпен өтетін $\vec{E}$ векторының күш сызықтарының саны немесе ағыны (17 сурет) келесі түрде анықталады:

$$d\Phi_E = E\cos\alpha dS \quad \text{немесе} \quad d\Phi_E = E_n dS = \vec{E}d\vec{S} \quad (18)$$



17 сурет

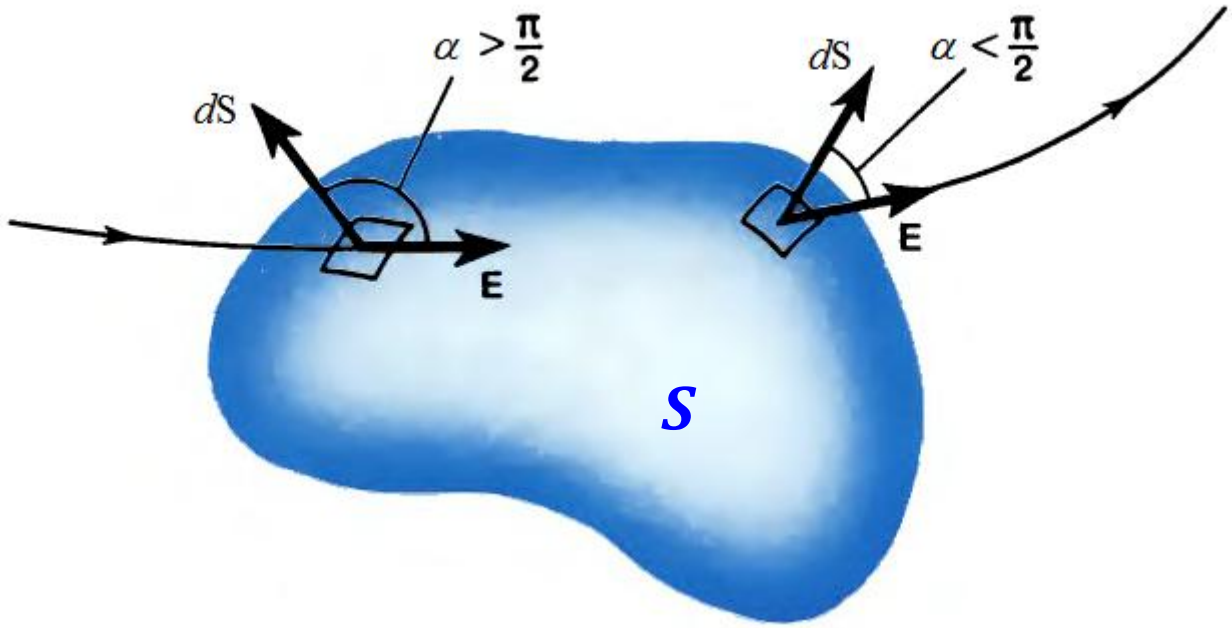
$$\Phi_E = \oint_S \vec{E}d\vec{S} \ [\text{В} \cdot \text{м}] \quad (19)$$

E_n – dS ауданшаның $\vec{n}$ нормаліне түсірілген $\vec{E}$ векторының проекциясы

Парселл Э.

Электр ағыны алгебралық шама, ол өріс конфигурациясынан бөлек нормаль бағытына да тәуелді. Егер бет тұйық болса сыртқа бығытталған нормальді алу керек.

$$\Phi_E = \oint_S E\, dS\, cos\alpha$$



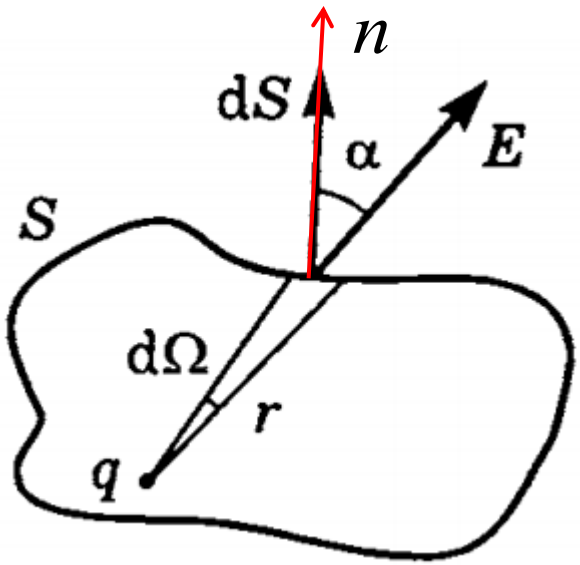
Максимал ағын

α	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{5\pi}{6}$	π	$\frac{7\pi}{6}$	$\frac{5\pi}{4}$	$\frac{4\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{2}$	$\frac{5\pi}{3}$	$\frac{7\pi}{4}$	$\frac{11\pi}{6}$
$\cos\alpha$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	−1	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$

Джанколи

Тұйық бет арқылы $\vec{E}$ векторының ағыны

$$d\Phi_E = E \cdot dS\cos\alpha = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q}{r^2} \cdot dS\cos\alpha = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0} d\Omega \quad (20)$$



17 сурет

$$\frac{dS\cos\alpha}{r^2} = d\Omega$$

$$\Omega = \frac{S}{r^2} = \frac{4\pi r^2}{r^2} = 4\pi$$

$$\Phi_E = \frac{\sum q_{\text{іш.}}}{\varepsilon_0} = \oint_S \vec{E} d\vec{S} \quad (21)$$

Ω – толық денелік бұрыш

Интегралдық формадағы Гаусс теоремасы

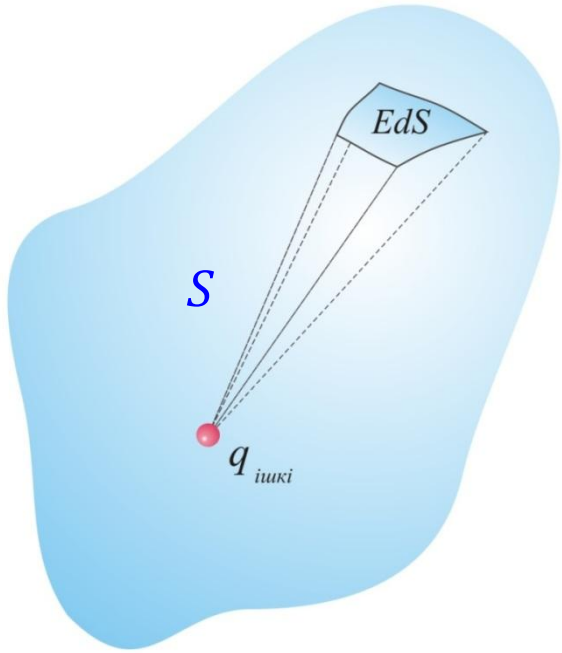
Кез-келген тұйық бет арқылы өтетін $\vec{E}$ векторының ағыны осы бет ішіндегі зарядтардың алгебралық қосындысын ε_0 -ге (электр тұрақтысы) бөлгенге тең:



Гáусс (1777-1855)

$$\oint_S \vec{E}\,\mathrm{d}\vec{S} = \frac{\sum q_{\text{іш.}}}{\varepsilon_0} \quad (21)$$

$$\oint_S \vec{E}\,\mathrm{d}\vec{S} = \frac{1}{\varepsilon_0}\int_V \rho\,\mathrm{d}V \quad (22)$$

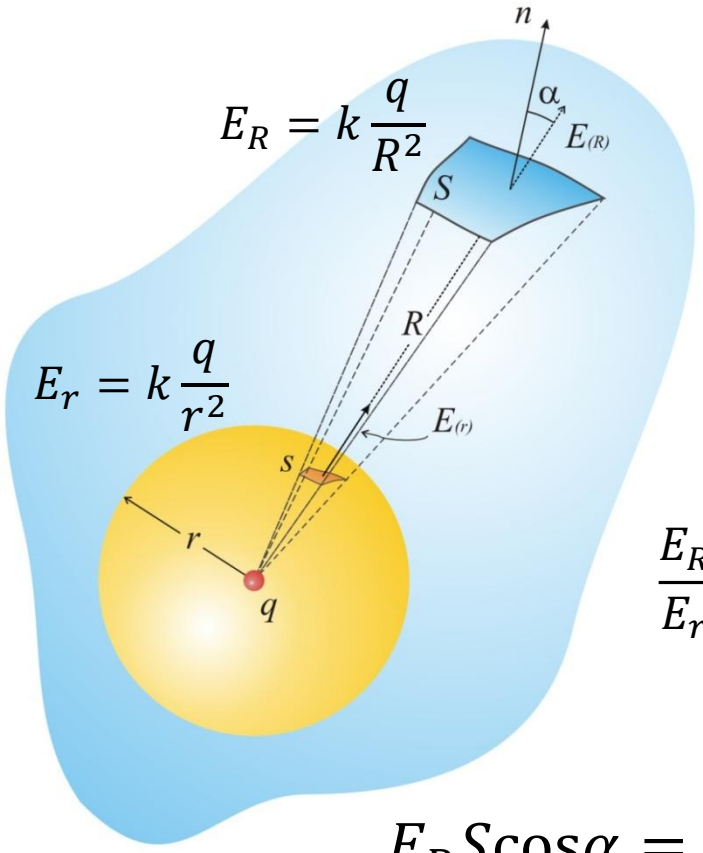


18 сурет

$\int_V \rho\,\mathrm{d}V$ – белгілі бір V көлемді қамтитын S тұйық бет ішіндегі суммалық заряд

Гаусс теоремасына дәлел

Нүктелік зарядты бірінің сыртынан екіншісі қаптайтындай етіп екі бетпен қоршаймыз (19 сурет). Беттердің ішкісі сфералық, ал сыртқысы қандайда бір кездейсоқ алынған формаға ие. Гаусс теоремасына сай екі беттен де өтетін ағын бір-біріне тең болуы керек.



19 сурет

$$s < S \Leftarrow \begin{matrix}(R/r)^2 \\ 1/\cos\alpha\end{matrix}$$

$$\Phi_{\text{іш}} = E_r s \ (23)$$

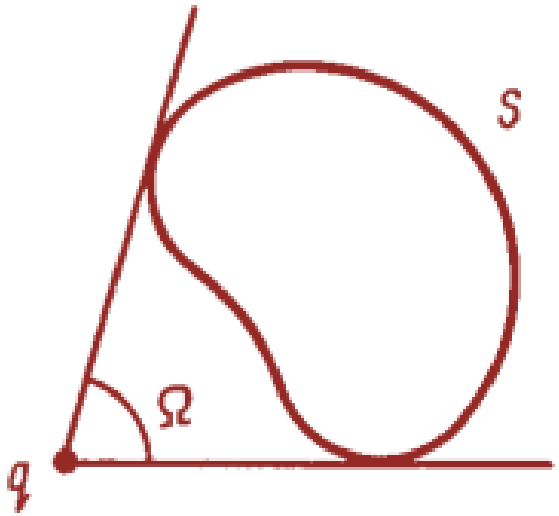
$$\Phi_{\text{сырт}} = E_R S\cos\alpha \ (24)$$

$$\frac{E_R}{E_r} = \frac{r^2}{R^2}$$

$$E_R S\cos\alpha = \left[E_r\left(\frac{r}{R}\right)^2\right]\left[s\left(\frac{R}{r}\right)^2\frac{1}{\cos\alpha}\right]\cos\alpha = E_r s \ (25)$$

Парселл Э. Стр. 40

Тұйық беттен тыс жатқан нүктелік заряд өрісінің ағыны



20 сурет

$$d\Phi_E = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0} d\Omega \quad (20)$$

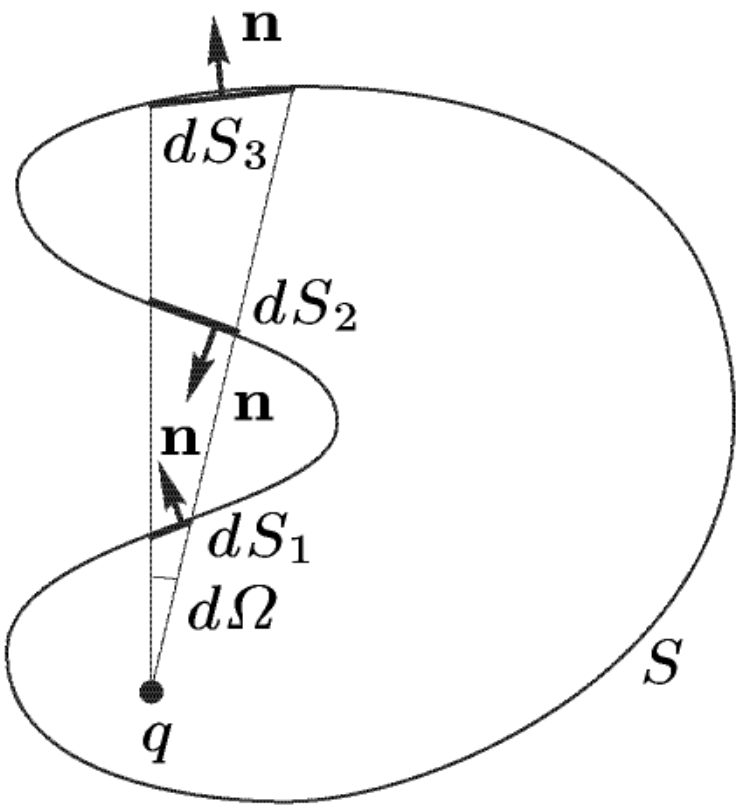
- Беттің сыртқы жағына тірелгенде $\Omega < 0$
- Беттің ішкі жағына тірелгенде $\Omega > 0$

$$-\Omega + \Omega = 0$$

$$\Phi = 0 \ (26)$$

Заряд тұйық беттен тыс жатса бет арқылы өтетін $\vec{E}$ векторының ағыны нөлге тең, яғни көлемге кірген күш сызықтары мен одан шыққандар өзара тең болады. Сонымен, тұйық бет арқылы ағын нөлден өзгеше болуы үшін $\vec{E}$ векторының күш сызықтары тұйық беттің ішінде аяқталуы, немесе сол жерден басталуы қажет, яғни тұйық беттің ішінде заряд орналасуы керек.

Өрістің күрделі бет арқылы ағыны



21 сурет

dS_1, dS_2 және dS_3 ауданшалардан көрінетін денелік бұрыштардың абсолюттік мәндері өзара тең екені белгілі.

Алайда $dS_2<0$.

И.В. Савельев

$\vec{E}$ векторының ағынына қатысты қорытындылар

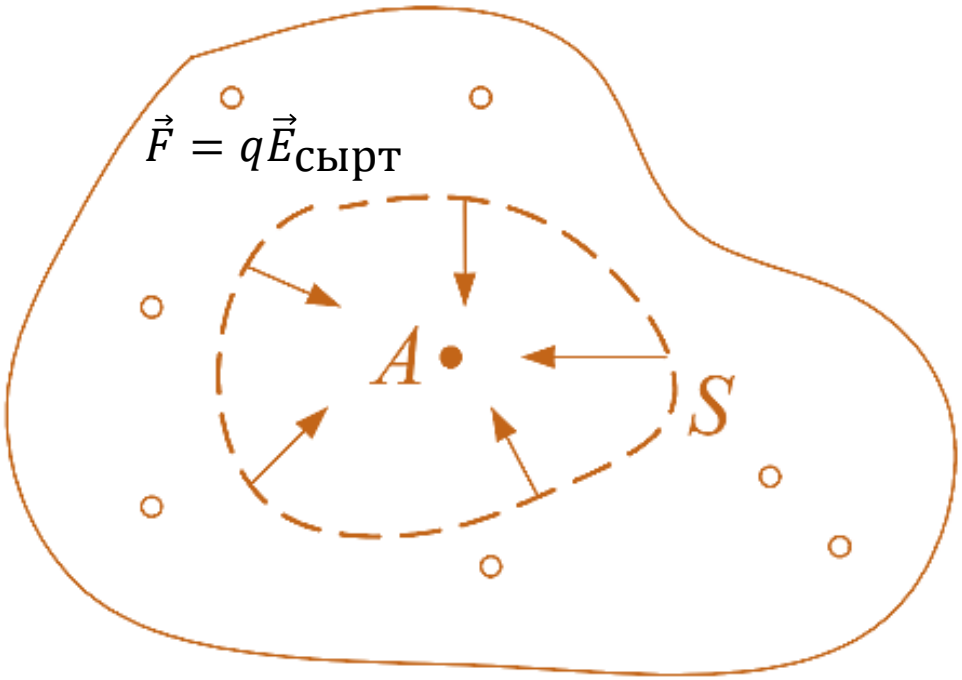
$\vec{E}$ өрісі барлық *зарядтардың конфигурациясынан* тәуелді, тұйық бет арқылы $\vec{E}$ векторының ағыны тек оның ішіндегі *зарядтардың алгебралық суммасымен* анықталады.

Демек, зарядтарды бастапқы орнынан қозғайтын болсақ *өріс барлық жерде өзгереді*, сол сиякты бет арқылы $\vec{E}$ векторының ағыны да. Егер зарядтар қозғалысы тек тұйық бет ішінде ғана болса онда толық бет арқылы $\vec{E}$ векторының ағыны өзгеріссіз қалады.

Гаусс теоремасын қолдану.

Тек электр статикалық өріс арқылы әсерлесетін нүктелік зарядтар жиынтығының орнықты тепе-теңдікте болуы мүмкін емес.

Ирншоу теоремасы (1842)



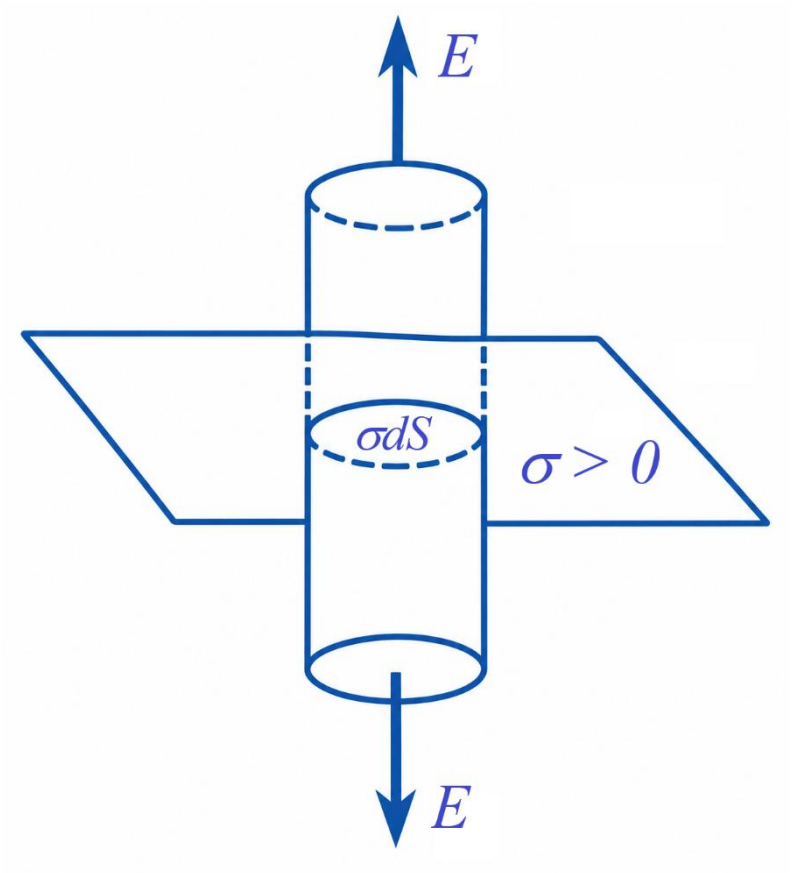
$$\oint_S \vec{E}_{\text{сырт}} \cdot d\vec{S} = 0$$



Самуэль Ирншоу
(1805-1888)

Гаусс теоремасын қолдану.

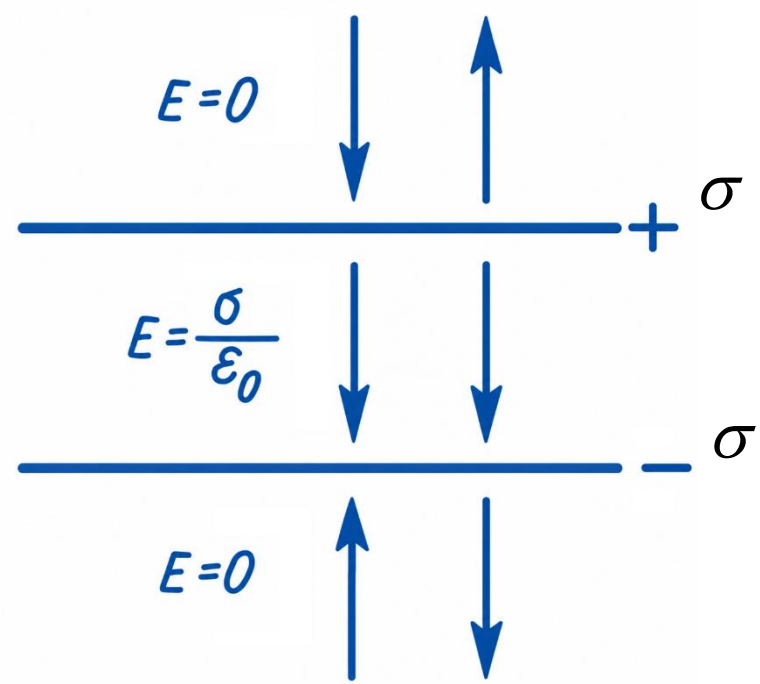
Біркелкі зарядталған шексіз жазық бет өрісі



$$2 \cdot EdS = \frac{\sigma dS}{\varepsilon_0} \quad \Rightarrow \quad E = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}$$

Гаусс теоремасын қолдану.

Біркелкі зарядталған өзара параллель орналасқан жазық беттер (конденсатор) өрісі



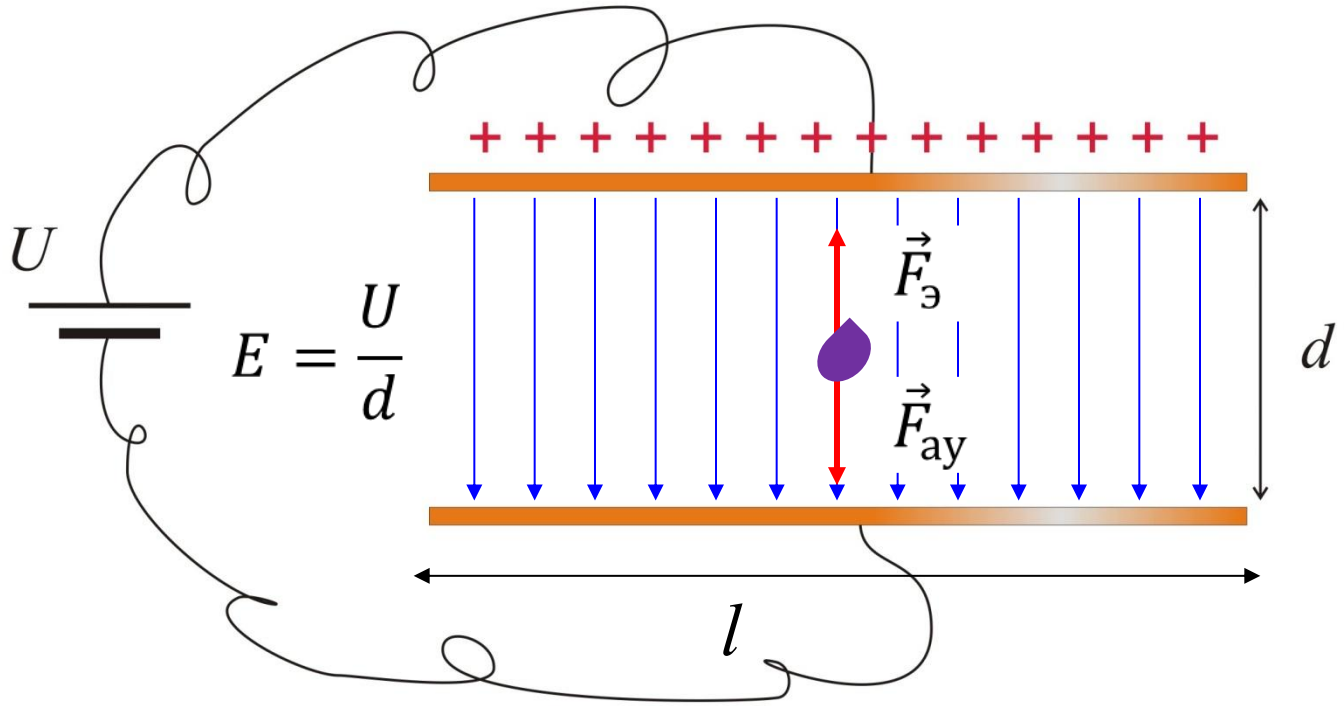
23 сурет

$$E = 2 \cdot \frac{\sigma}{2\varepsilon_0} = \frac{\sigma}{\varepsilon_0}$$

Шарт: $d \ll \sqrt{S}$

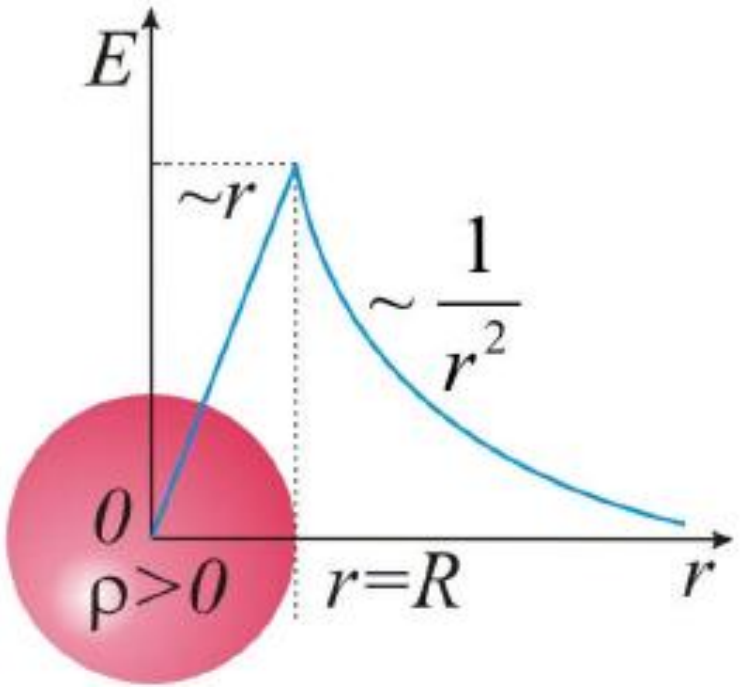
Милликен тәжірибесі. Май тамшысы теріс зарядталған болсын

$$l \gg d \gg d_{там}$$



Көлем бойынша зарядталған шар өрісі ($r < R$)

Радиусы R шар ρ көлемдік тығыздықпен біркелкі зарядталған.



24 сурет

$$\oint \vec{E} \cdot d\vec{S} = \frac{q_{\text{ішкі}}}{\varepsilon_0}$$

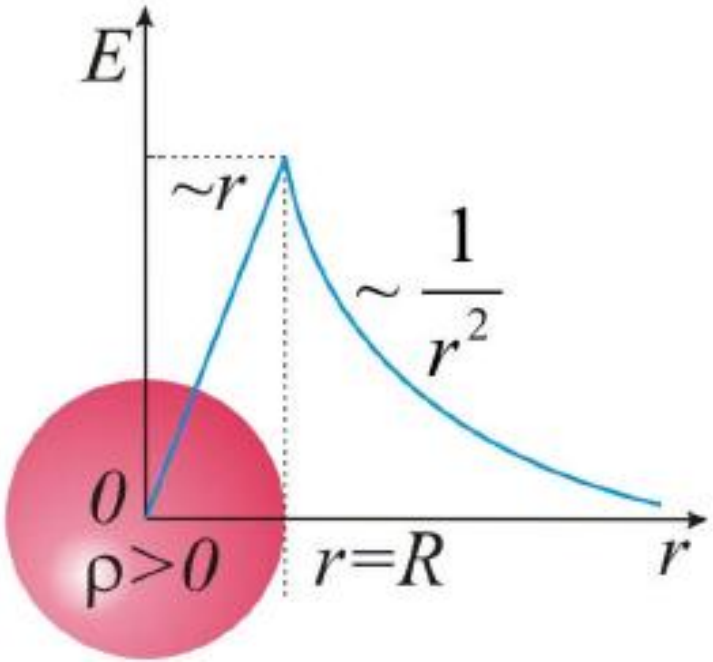
$$q_{\text{ішкі}} = \rho V = \rho \frac{4}{3} \pi r^3$$

$$E \cdot 4\pi r^2 = \frac{\rho \frac{4}{3} \pi r^3}{\varepsilon_0}$$

$$E(r) = \frac{\rho r}{3\varepsilon_0}$$

R – шар радиусы; $E(r)$ – r қашықтық бойынша өріс кернеулігінің таралуы

Көлем бойынша зарядталған шар өрісі ($r > R$)



24 сурет

Шардың сыртында $r > R$ бүкіл заряд өзгермейді. Формасы симметриялы болғандықтан өріс кернеулігі шар сыртындағы сфералық бет үшін де нүктелік зарядтікіндей болады:

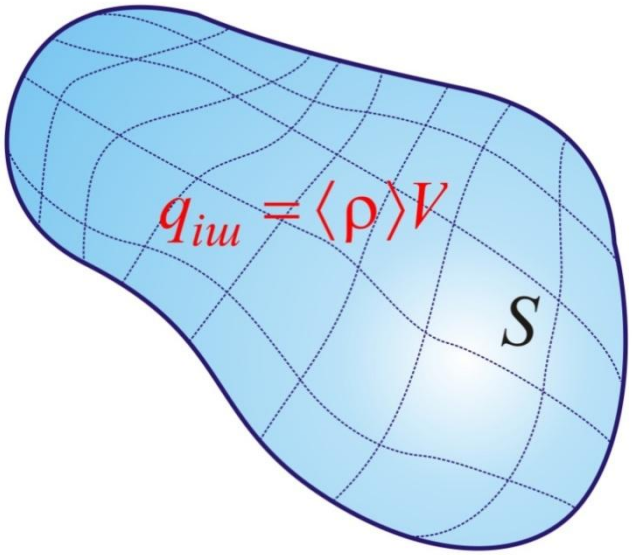
$$E(r) = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}$$

$$E \propto \frac{1}{r^2}$$

R – шар радиусы; V – шар көлемі

Дифференциалдық формадағы Гаусс теоремасы

- кеңістіктің қандай да бір нүктесіндегі зарядтың көлемдік тығыздығымен ρ соның маңайындағы кернеулік $\vec{E}$ өзгерісін байланыстырады.



25 сурет

$$\oint_S \vec{E}\,\mathrm{d}\vec{S} = \frac{q_{\text{іш.}}}{\varepsilon_0} \quad (21)$$

$$\oint_S \vec{E}\,\mathrm{d}\vec{S} = \frac{1}{\varepsilon_0}\langle\rho\rangle V \quad (27)$$

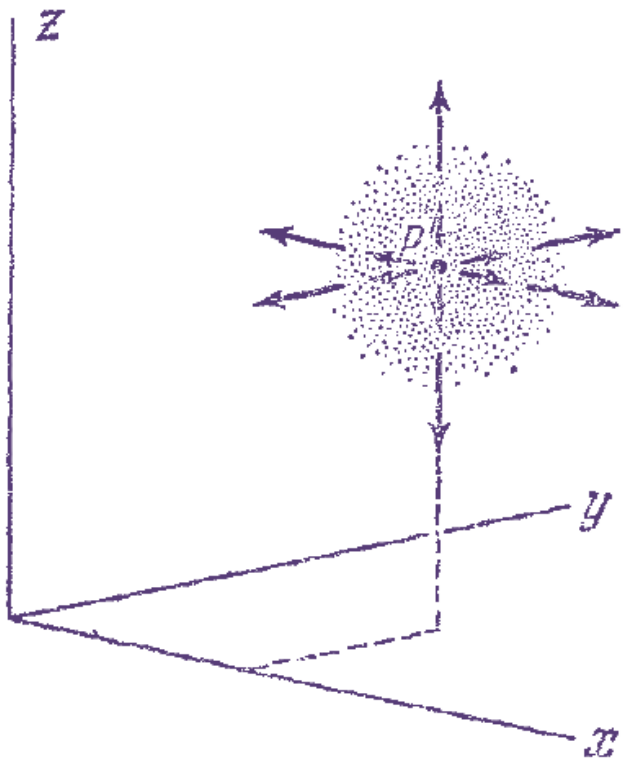
$$\frac{\oint_S \vec{E}\,\mathrm{d}\vec{S}}{V} = \frac{\langle\rho\rangle}{\varepsilon_0} \quad (28)$$

$V \to 0 \Rightarrow \langle\rho\rangle \to \rho$

$\langle\rho\rangle - V$ көлем бойынша зарядтың көлемдік тығыздығының орташа шамасы

Дифференциалдық формадағы Гаусс теоремасы

$V \to 0$ кезіндегі $\oint \vec{E} \mathrm{d}\vec{S} -$ тің V –ға қатынасының шегі болатын шаманы *E өрісінің дивергенциясы* деп атайды және келесі түрде белгіленеді, $\mathrm{div}\vec{E}$. Дивергенция координаттың скаляр функциясы.



22 сурет
Р нүктесіндегі өріс дивергенциясы

Шексіз аз көлем аламыз, осы көлемді қоршап жатқан бет арқылы электр өрісі ағынын анықтаймыз, және осы ағынның көлемге қатынасы *E* өрісінің дивергенциясы үшін өрнекті береді:

$$\lim_{V \to 0} \frac{1}{V} \oint_S \vec{E} \mathrm{d}\vec{S} = \mathrm{div}\vec{E} \quad (29)$$

Осылайша дивергенция үшін алынған өрнек *координаттар жүйесін таңдауға тәуелді* болады, мысалы үш өлшемді декарттық координаттар жүйесі үшін:

$$\mathrm{div}\vec{E} = \frac{\partial E_x}{\partial x} + \frac{\partial E_y}{\partial y} + \frac{\partial E_z}{\partial z} \quad (30)$$

Дифференциалдық формадағы Гаусс теоремасы

$$\frac{\oint_S \vec{E}\,d\vec{S}}{V} = \frac{\langle\rho\rangle}{\varepsilon_0} \quad (28) \quad \Rightarrow \quad \boxed{\mathrm{div}\vec{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_0} \quad (31)}$$

$$\vec{\nabla} = \vec{\imath}\frac{\partial}{\partial x} + \vec{\jmath}\frac{\partial}{\partial y} + \vec{k}\frac{\partial}{\partial z} \quad (32)$$

$$\vec{\nabla}\cdot\vec{E} = \nabla_x E_x + \nabla_y E_y + \nabla_z E_z = \frac{\partial}{\partial x}E_x + \frac{\partial}{\partial y}E_y + \frac{\partial}{\partial z}E_z \quad (30)$$

$$\boxed{\vec{\nabla}\cdot\vec{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_0} \quad (33)}$$

Дифференциалдық формада Гаусс теоремасы *локальды* болады, яки электр өрісінің кернеулігі тек қана қарастырып отырған нүктедегі *зарядтардың тығыздығынан тәуелді* болады. Егер дивергенция оң болса онда ол жердегі нүктеде өріс көзі, ақпа (исток), ал дивергенция теріс болса, онда ол нүктеде құйма (сток) орналасқан.

$\vec{\nabla}$ – набла операторы (алгебралық вектор)