9-ДӘРІС

Гироскоп және Эйлер теңдеулері



Бір нүктесі бекітілген қатты дене
Прецессия және нутация

Исатаев М.С.

Дәрістің мақсаты, нәтижелері және мазмұны

Мақсаты

Гироскоп қозғалысын импульс моменті және Эйлер теңдеулері арқылы түсіндіру.

Оқыту нәтижелері

Эйлер теңдеулерін қолданады.
Гироскоптың сақталатын шамаларын табады.
Прецессия мен нутацияны ажыратады.

Мазмұны

1. Бір нүктесі бекітілген дене және бас осьтердегі динамика.
2. Қозғалатын жүйедегі туынды және Эйлер теңдеулері.
3. Еркін гироскоп және сақталатын шамалар.
4. Күш моменті әсеріндегі прецессия және нутация.

Бір нүктесі бекітілген қатты дене

О нүктесі кеңістікте қозғалмайды. Дененің орны үш тәуелсіз бұрышпен сипатталады.

Гироскоп симметрия осі бойымен тез айналатын дене ретінде қарастырылады. Кардан аспасы оның осіне бағдарын өзгертуге мүмкіндік береді.

Еркін гироскоп үшін бекіту нүктесі массалар центрімен сәйкесіп, үйкеліс моменті еленбейді.

Бас осьтердегі импульс моменті мен энергия

$$L_1 = I_1\omega_1,\ \ L_2 = I_2\omega_2,\ \ L_3 = I_3\omega_3$$

$$K = \tfrac{1}{2}(I_1\omega_1^2 + I_2\omega_2^2 + I_3\omega_3^2)$$

Осьтер денемен бірге айналады және О нүктесіне қатысты инерцияның бас осьтерімен бағыттас болады.

ωі мен Li осы қозғалатын осьтерге проекциялар ретінде алынады.

Қозғалатын және инерциялық жүйелердегі туынды

$$\mathbf{(d\vec{L}/dt)_{ин} = (d\vec{L}/dt)_{дене} + \vec{\omega} \times \vec{L}}$$

$$\vec{M} = (d\vec{L}/dt)_{дене} + \vec{\omega} \times \vec{L}$$

Қосымша векторлық көбейтінді денемен байланысқан координаталар осьтерінің айналуын ескереді.

О бекітілген нүкте, $\vec{M}$ осы нүктеге қатысты сыртқы күштердің толық моменті.

Эйлердің динамикалық теңдеулері

$$I_1\dot{\omega_1} + (I_3 - I_2)\omega_2\omega_3 = M_1$$

$$I_2\dot{\omega_2} + (I_1 - I_3)\omega_3\omega_1 = M_2$$

$$I_3\dot{\omega_3} + (I_2 - I_1)\omega_1\omega_2 = M_3$$

$\dot{\omega i} = d\omega i/dt$. Бас инерция моменттері денемен байланысқан жүйеде тұрақты.

Еркін гироскоптың сақталатын шамалары

$\vec{M} = 0$

$\vec{L} = const$ $K = const$

Импульс моментінің векторы инерциялық кеңістікте бағытын сақтайды. Денемен бірге айналатын осьтердегі компоненттері өзгеруі мүмкін.

Жалпы жағдайда $\vec{L}$, $\vec{\omega}$ және дененің симметрия осі бір бағытта жатпайды.

Симметриялы еркін гироскоп

$I_1 = I_2 = I_\perp,\ \ I_3 = I_\parallel$

$\dot{\omega}_3 = 0,\ \ \omega_3 = \text{const}$

$\dot{\omega}_1 = -\Omega b \omega_2 \qquad \dot{\omega}_2 = \Omega b \omega_1$

$\Omega b = [(I_\parallel - I_\perp)/I_\perp]\omega_3$

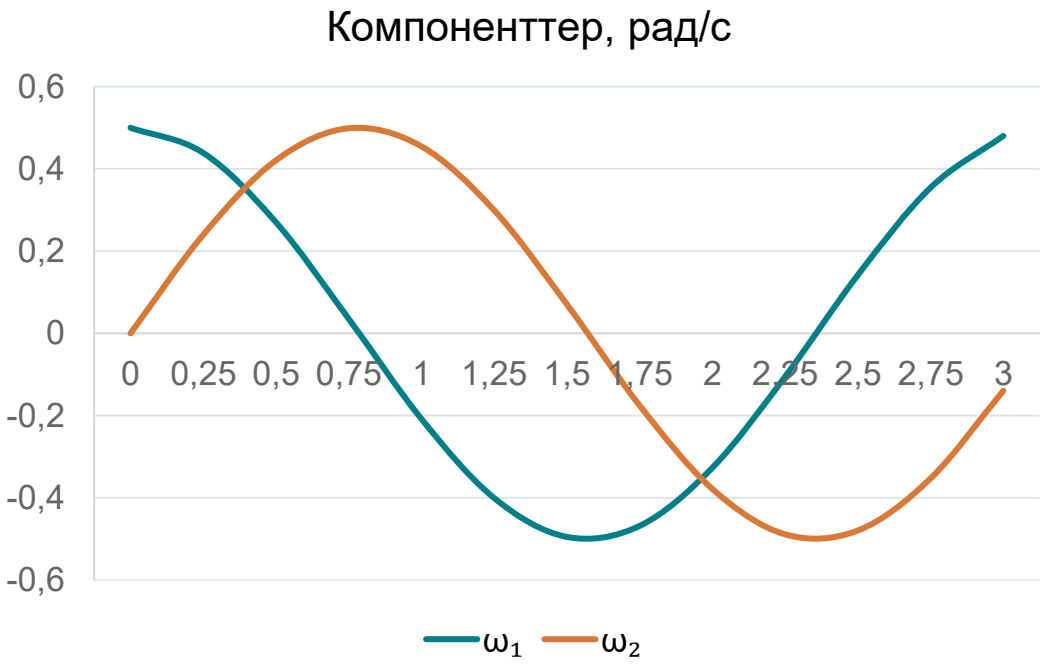
Симметрия осі ретінде 3-ось таңдалды. Ωb таңбасы айналу бағытын анықтайды.

Бұрыштық жылдамдық компоненттерінің өзгеруі

$\omega_1 = A \cos(\Omega bt + \varphi_0)$
$\omega_2 = A \sin(\Omega bt + \varphi_0)$

$I_\perp = 0{,}02$ кг·м²
$I_\parallel = 0{,}03$ кг·м²
$\omega_3 = 4$ рад/с

Ωb = 2 рад/с.
Графикте A = 0,5 рад/с, $\varphi_0 = 0$.

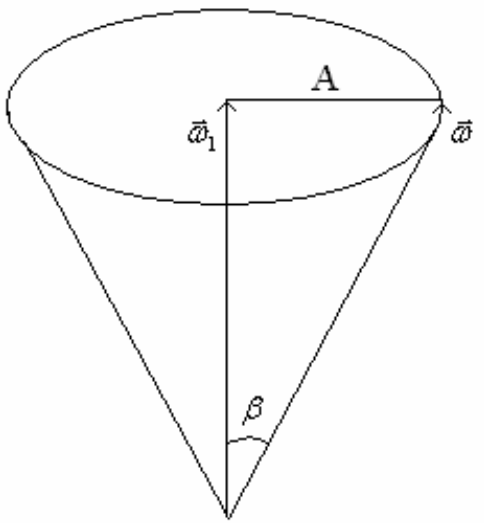


Көлденең ось: t, с.

Еркін прецессияның геометриясы

$\Omega кең = |L^{\rightarrow}|/I\perp$

Симметриялы еркін дененің осі кеңістікте тұрақты $L^{\rightarrow}$ векторын айнала конус сызады. Олардың арасындағы бұрыш тұрақты.



Денелік жүйеде $\omega^{\rightarrow}$ компоненттерінің айналуы Ωb арқылы сипатталады. Бұл кеңістіктегі прецессия жиілігімен бірдей шама емес.

Күш моменті әсеріндегі прецессия

$$d\vec{L}/dt = \vec{M}$$

Ауырлық күшінің моменті:
$|\vec{M}| = mgl \sin\theta$

$\Omega p \approx mgl/(I\|\omega_3)$



Бұл жуықтау тез айналатын ауыр симметриялы зырылдауықтың баяу, тұрақты прецессиясына арналған. I тіректен массалар центріне дейін өлшенеді.

Прецессия және нутация

Құбылыс	Негізгі белгісі
Прецессия	Осьтің берілген бағытты айнала бағдарын өзгертуі
Нутация	Осьтің көлбеулік бұрышы θ-ның уақытпен өзгеруі
Еркін симметриялы дене	Идеал жағдайда ось пен $\vec{L}$ арасындағы бұрыш тұрақты

Тұрақты конус бойымен қозғалыс пен көлбеулік бұрышының тербелісін ажырату қажет.

Эйлер бұрыштары: φ прецессияны, θ көлбеулікті, ψ өзіндік айналуды сипаттайды.

Қорытынды және өзін өзі тексеру

Гироскоп қозғалысын сыртқы күш моменті, инерцияның бас моменттері және бастапқы шарттар анықтайды. Денелік және кеңістіктік сипаттауды ажырату маңызды.

1. Эйлер теңдеулеріндегі $\vec{\omega} \times \vec{L}$ мүшесі неге пайда болады?
2. Еркін гироскопта қандай шамалар сақталады?
3. Симметриялы денеде ω_3 неге тұрақты болады?
4. Денелік Ωb мен кеңістіктік прецессияның айырмашылығы неде?
5. Нутация прецессиядан қалай ажыратылады?