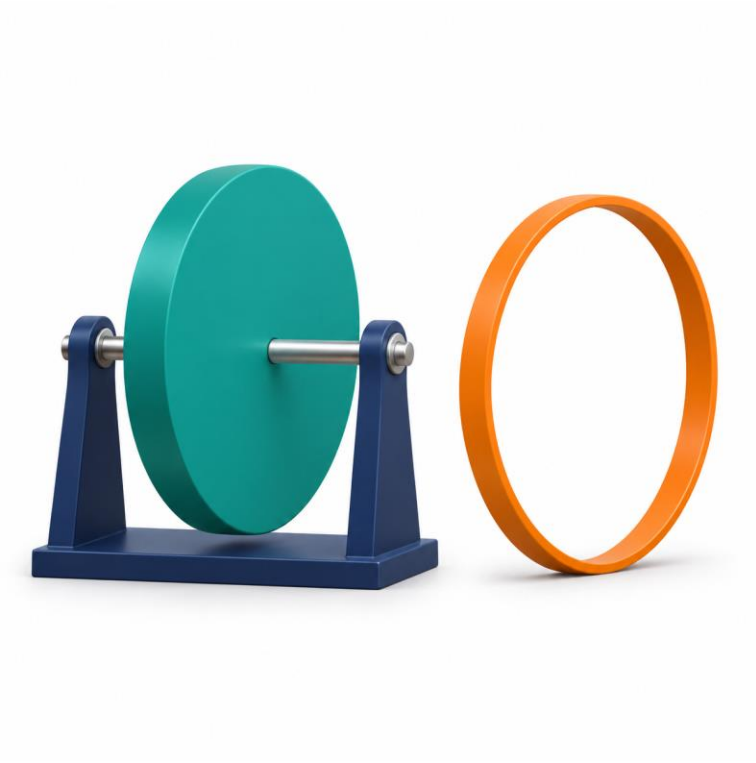
8-ДӘРІС

Қатты дененің динамикасы



Инерция тензоры және инерция моменті
Қатты дененің кинетикалық энергиясы

Исатаев М.С.

Дәрістің мақсаты, нәтижелері және мазмұны

Мақсаты

Массаның таралуын айналмалы қозғалыс динамикасымен және кинетикалық энергиямен байланыстыру.

Оқыту нәтижелері

Инерция моментін есептейді.
Айналмалы қозғалыс теңдеуін құрады.
Домалаудың энергия балансын қолданады.

Мазмұны

1. Қатты дененің қозғалыс теңдеулері және инерция тензоры.
2. Инерцияның бас осьтері және оське қатысты инерция моменті.
3. Гюйгенс–Штейнер теоремасы және айналу динамикасы.
4. Айналмалы және жазық қозғалыстың кинетикалық энергиясы.

Абсолют қатты дене және қозғалыс теңдеулері

Абсолют қатты дененің кез келген екі нүктесінің арақашықтығы өзгермейді.

$$d\vec{P}/dt = \Sigma \vec{F}сырт$$

$$d\vec{L}O/dt = \vec{M}O,сырт$$

Екінші теңдеуде О инерциялық жүйедегі қозғалмайтын нүкте ретінде алынады.

Инерция тензоры

$$\vec{L}_O = I_O \vec{\omega}$$

Ixx	Ixy	Ixz
Iyx	**Iyy**	Iyz
Izx	Izy	**Izz**

Iij = Iji болғандықтан, алты тәуелсіз компонент жеткілікті.

$$I_{xx} = \int (y^2 + z^2) dm$$

$$I_{xy} = -\int xy \, dm$$

Тензор массаның таңдалған нүкте мен осьтерге қатысты таралуын сипаттайды.

Инерцияның бас осьтері

Бас осьтерде диагональ емес компоненттер нөлге тең.

$$L_1 = I_1\omega_1,\ \ L_2 = I_2\omega_2,\ \ L_3 = I_3\omega_3$$

$$\det(I - Iбас\ E) = 0$$

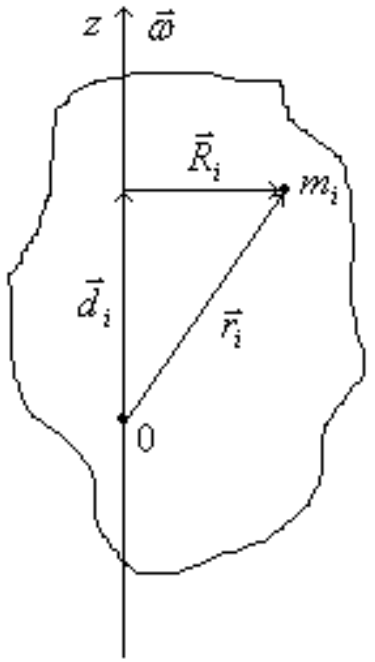
det анықтауышты, E бірлік матрицаны білдіреді. Теңдеудің түбірлері бас инерция моменттерін береді.

Жалпы жағдайда $\vec{L}$ және $\vec{\omega}$ параллель емес. Бас ось бойымен айналғанда олардың бағыттары сәйкес келеді.

Оське қатысты инерция моменті

$$I_z = \Sigma m_i R_i^2$$

$$I_z = \int R^2 dm$$



R масса элементінен айналу осіне дейінгі ең қысқа қашықтықты білдіреді.

Өлшем бірлігі: кг·м².
Масса осьтен алыстаған сайын I артады.

Типтік денелердің инерция моменттері

Біртекті дене	Айналу осі	Инерция моменті
Жұқа сақина	Центрлік симметрия осі	mR^2
Тұтас диск	Дискке перпендикуляр центрлік ось	$mR^2/2$
Тұтас шар	Центрден өтетін ось	$2mR^2/5$
Жіңішке өзек	Центрден өтетін көлденең ось	$ml^2/12$
Жіңішке өзек	Ұшынан өтетін көлденең ось	$ml^2/3$

R радиус, l өзек ұзындығы. Әр формула көрсетілген оське ғана қатысты.

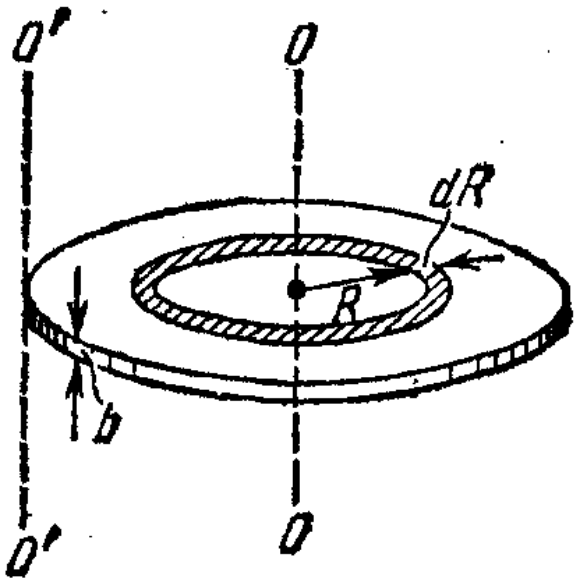
Дискінің инерция моментін есептеу

$dm = \sigma \cdot 2\pi r\, dr, \quad \sigma = m/(\pi R^2)$

$I = \int_0^R r^2 dm$

$I = 2\pi\sigma \int_0^R r^3 dr$

$I = \pi\sigma R^4/2 = mR^2/2$



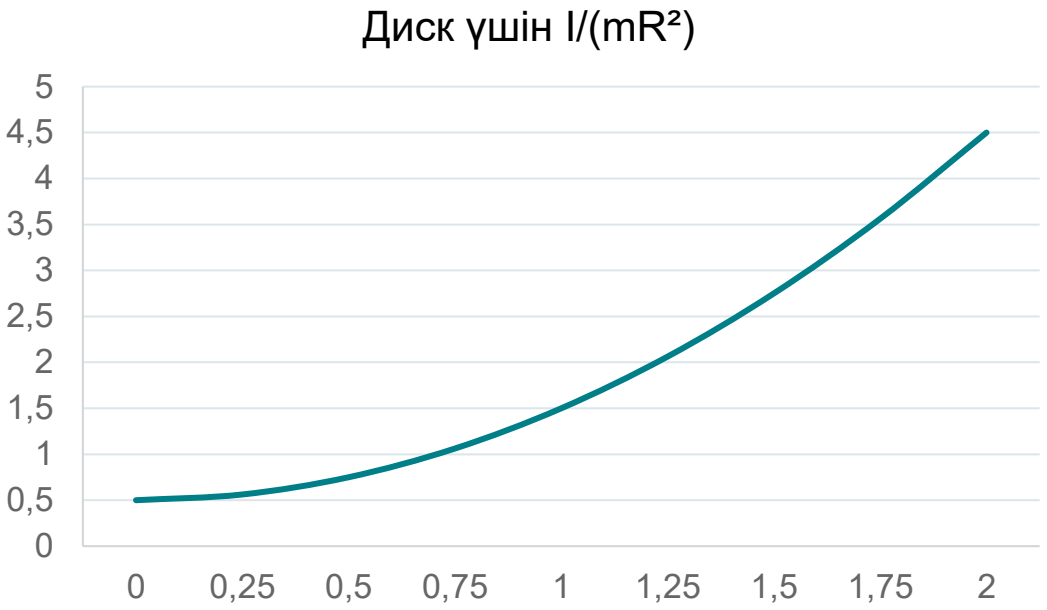
Диск концентрлік жұқа сақиналарға бөлінеді. Әр сақинаның үлесі r^2dm-ге тең.

Гюйгенс–Штейнер теоремасы

$I = IC + ma^2$

Осьтер параллель болуы және олардың біреуі массалар центрінен өтуі керек.

Диск: m = 2 кг, R = 0,5 м.
IC = 0,25 кг·м².
a = R болса, I = 0,75 кг·м².



Көлденең ось: a/R.

Қозғалмайтын оське қатысты динамика

$$L_z = I_z\omega$$

$$M_z = dL_z/dt = I_z\varepsilon$$

Ось қозғалмайды, I_z тұрақты. M_z осы оське қатысты сыртқы күштер моменттерінің қосындысы.

Мысал: $I_z = 0{,}25$ кг·м², $M_z = 0{,}50$ Н·м.
$\varepsilon = M_z/I_z = 2$ рад/с².

Айналмалы қозғалыстың кинетикалық энергиясы

$K_{айн} = \frac{1}{2}\vec{\omega} \cdot \vec{L_O} = \frac{1}{2}\vec{\omega} \cdot I_O\vec{\omega}$

Бас осьтерде:
$K_{айн} = \frac{1}{2}(I_1\omega_1^2 + I_2\omega_2^2 + I_3\omega_3^2)$

Бір қозғалмайтын ось үшін: $K_{айн} = I_z\omega^2/2$.

$I_z = 0{,}25$ кг·м², $\omega = 4$ рад/с болса, $K_{айн} = 2$ Дж.

Жазық қозғалыс және сырғанамай домалау

$$K = mVC^2/2 + ICω^2/2$$

Сырғанамай домалағанда $VC = ωR$.

Тұтас диск: $K = 3mVC^2/4$.
Жұқа сақина: $K = mVC^2$.

Массалары мен центр жылдамдықтары бірдей болса, сақинаның толық кинетикалық энергиясы үлкенірек.

Қорытынды және өзін өзі тексеру

Инерция моменті айналмалы қозғалыстағы инерттілікті сипаттайды. Есепте осьті, массаның таралуын және қозғалыс түрін дұрыс таңдау қажет.

1. Инерция тензоры мен осьтік инерция моментінің айырмашылығы қандай?
2. Инерцияның бас осьтері қандай қасиетке ие?
3. Гюйгенс–Штейнер теоремасының қолданылу шарттары қандай?
4. $M_z = I_z \varepsilon$ теңдеуі қандай жағдайда орындалады?
5. Домалайтын дененің энергиясы қандай бөліктерден құралады?