КАЗАХСКИЙ НАЦИОНАЛЬНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ ИМ. АЛЬ-ФАРАБИ

Импульсная и переходная характеристики линейных систем

Интеграл свёртки

Теория линейных систем автоматического управления

Лекция 2 • Нұрғалиев М.К. • Алматы

ЛИНЕЙНЫЕ ДИНАМИЧЕСКИЕ СИСТЕМЫ

Цель и структура лекции

Цель

Изучить импульсную и переходную характеристики и применение интеграла свёртки для расчёта реакции на произвольный вход.

Исходные условия

Линейная стационарная система; нулевые начальные условия; причинность.

Результат изучения

Уметь связать вход u(t), импульсную характеристику w(t) и выход x(t).

ШЕСТЬ ПУНКТОВ ПЛАНА — ШЕСТЬ ОСНОВНЫХ СЛАЙДОВ

1 Математическое описание линейной системы

2 Решение уравнения при произвольном входе

3 Интеграл свёртки

4 Импульсная характеристика

5 Переходная характеристика

6 Связь двух характеристик

Математическое описание линейной системы

$$2\frac{dx(t)}{dt} + x(t) = u(t)$$

Модель линейной системы первого порядка из лекции

Вход u(t)

Управляющее воздействие, поступающее на вход системы.

Выход x(t)

Величина, характеризующая реакцию системы.

Время t

Независимая переменная, описывающая динамику.

$$x(0) = 0$$

Нулевое начальное условие: система начинает движение из исходного состояния

Решение уравнения при произвольном входном воздействии

ШАГ 1. СВОБОДНОЕ ДВИЖЕНИЕ

$$2\dot{x} + x = 0 \Rightarrow \boxed{x_{св}(t) = Ce^{-t/2}}.$$

ШАГ 2. ВАРИАЦИЯ ПОСТОЯННОЙ

$$x(t) = \tilde{C}(t)e^{-t/2}$$

После подстановки

$2\dot{\tilde{C}}(t)e^{-t/2} = u(t)$, поэтому $\dot{\tilde{C}}(t) = \frac{1}{2}u(t)e^{t/2}$

Интегрирование при x(0)=0

$$C(t) = \frac{1}{2}\int_0^t u(\tau)e^{\tau/2}\,d\tau$$

$$\boxed{x(t) = \int_0^t u(\tau)\frac{1}{2}e^{-(t-\tau)/2}\,d\tau}.$$

Реакция системы на произвольный входной сигнал

Интеграл свёртки

$$x(t) = \int_0^t u(\tau)\frac{1}{2}e^{-(t-\tau)/2}\,d\tau.$$

Интеграл свёртки (интеграл Дюамеля в импульсной форме)

ФИЗИЧЕСКИЙ СМЫСЛ

Входной сигнал

Разбивается на элементарные импульсные воздействия

Реакции системы

Каждый импульс вызывает собственный отклик w(t−τ)

Суммарный выход

Все отклики складываются за интервал от 0 до t

Выход в момент t зависит от текущих и всех предшествующих значений входа: система обладает памятью.

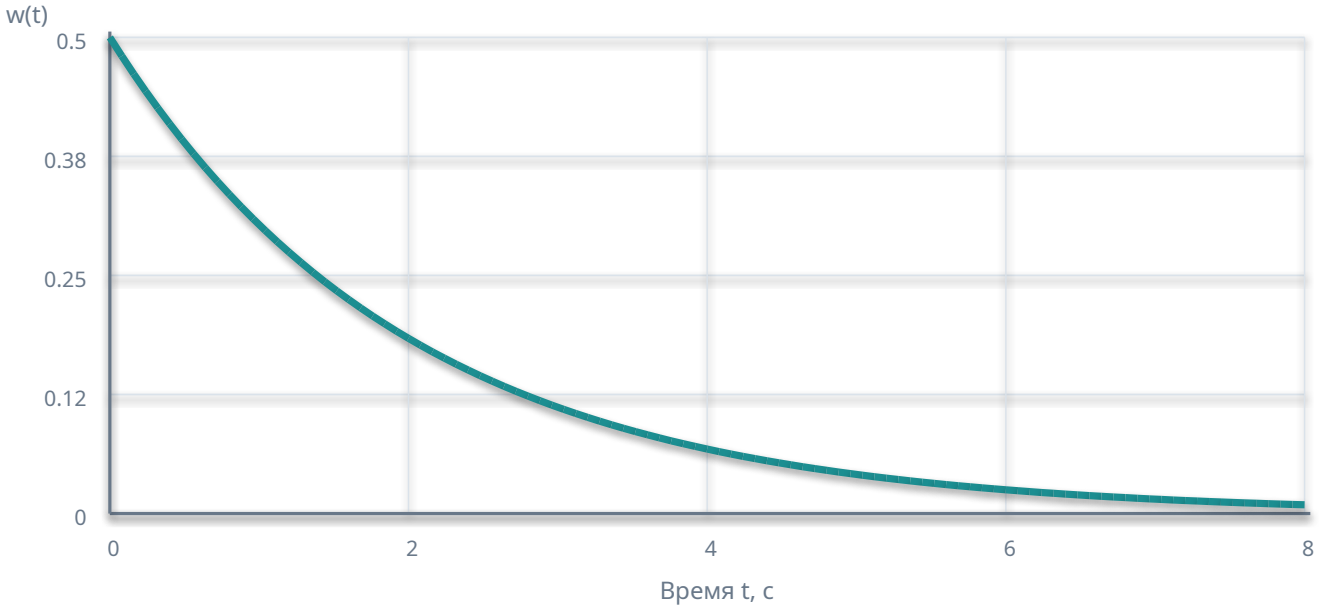
Импульсная характеристика системы

$$u(t) = \delta(t)$$

Единичный импульс на входе

$$\boxed{w(t) = \frac{1}{2} e^{-t/2}}, \qquad t \geq 0$$

Импульсная характеристика системы из лекции



Реакция на кратковременное воздействие

w(t) = 0 при t < 0 для причинной системы.

Сразу после импульса $w(0^+) = 0{,}5$.

Далее отклик экспоненциально уменьшается и стремится к нулю.

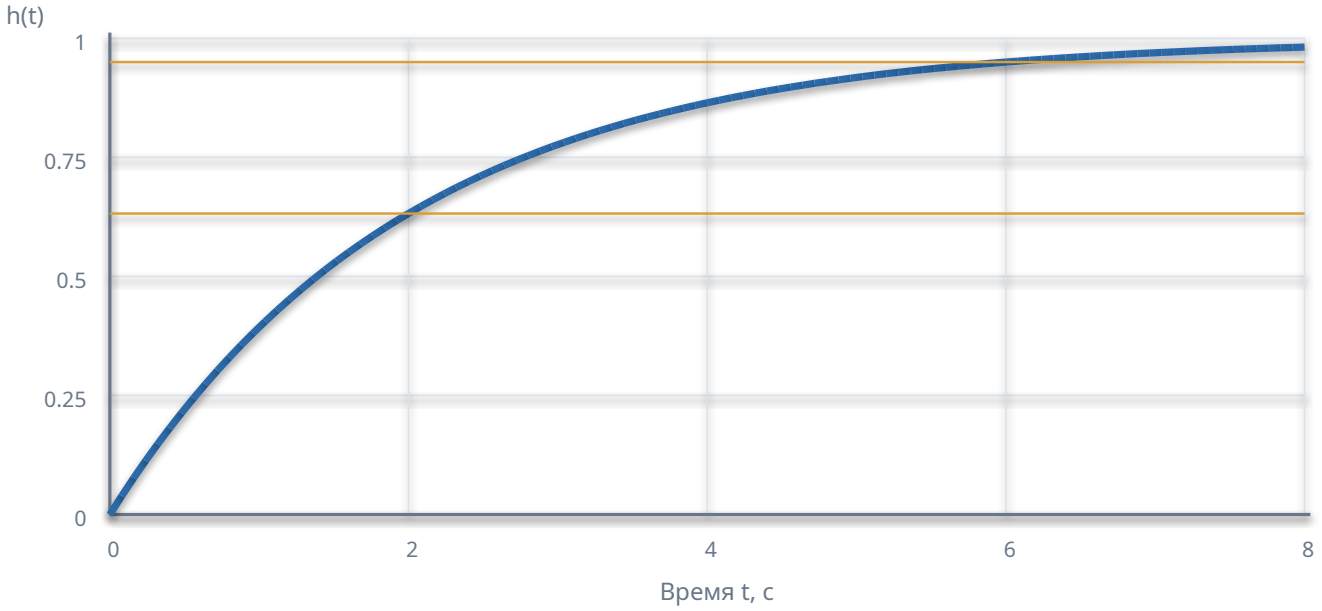
Переходная характеристика системы

$$u(t) = 1(t)$$

Единичное ступенчатое воздействие

$$h(t) = 1 - e^{(-t/2)}, \quad t \geq 0$$

Переходная характеристика системы из лекции



63,2% при t = T = 2 с

95% при t = 3T = 6 с

Переходная характеристика позволяет оценить инерционность и скорость достижения установившегося значения $h(\infty) = 1$.

Связь между импульсной и переходной характеристиками

$$w(t) = dh(t)/dt$$

Импульсная характеристика — производная переходной

$$\boxed{h(t) = 1 - e^{-t/2}}, \qquad t \geq 0.$$

Переходная характеристика — интеграл импульсной

ПРОВЕРКА ДЛЯ РАССМАТРИВАЕМОЙ СИСТЕМЫ

$$h(t) = 1 - e^{-t/2}. \Rightarrow w(t) = \frac{d}{dt}\left(1 - e^{-t/2}\right).$$

Единичный импульс является обобщённой производной единичной ступенчатой функции.

Импульсная характеристика описывает кратковременный отклик; переходная — отклик на включение, сохраняющееся во времени.

Связь используется для причинной линейной стационарной системы при нулевых начальных условиях и отсутствии прямой передачи входа на выход.

Основные выводы

Дифференциальное уравнение связывает входной сигнал и выход системы.

Интеграл свёртки даёт реакцию на произвольный вход через импульсную характеристику.

Импульсная характеристика — отклик на $\delta(t)$; переходная — отклик на единичную ступень.

Зная одну характеристику, можно получить другую дифференцированием или интегрированием.

Контрольные вопросы

1. Что означают нулевые начальные условия?

2. В чём физический смысл интеграла свёртки?

3. Какое свойство дельта-функции используется при выводе w(t)?

4. Чем импульсная характеристика отличается от переходной?

5. Что характеризует постоянная времени T?

6. Как определить h(t) по w(t) и w(t) по h(t)?

Список использованной литературы

Бесекерский В. А., Попов Е. П. Теория систем автоматического регулирования. — М.: Наука, 1975.

Ким Д. П. Теория автоматического управления. Т. 1. Линейные системы. — М.: Физматлит, 2003.

Кузовков Н. Т. Теория автоматического управления. — М.: Высшая школа, 1990.

Ogata K. Modern Control Engineering. — 5th ed. — Prentice Hall, 2010.

Dorf R. C., Bishop R. H. Modern Control Systems. — 13th ed. — Pearson, 2017.

Nise N. S. Control Systems Engineering. — 8th ed. — Wiley, 2019.