КАЗАХСКИЙ НАЦИОНАЛЬНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ ИМ. АЛЬ-ФАРАБИ

Частотные характеристики линейных систем

АФЧХ • АЧХ • ФЧХ

Теория линейных систем автоматического управления

Лекция 4 • Нұрғалиев М.К. • Алматы

Цель и план лекции

Цель

Изучить частотные характеристики и методы их определения по передаточной функции.

Основной подход

Подать гармонический сигнал и исследовать амплитуду и фазу установившегося выхода.

Практический результат

Уметь строить и интерпретировать АФЧХ, АЧХ и ФЧХ.

ВОСЕМЬ ПУНКТОВ ПЛАНА — ВОСЕМЬ ОТДЕЛЬНЫХ СОДЕРЖАТЕЛЬНЫХ СЛАЙДОВ

1 Понятие частотных характеристик системы автоматического управления

2 Связь преобразования Лапласа и преобразования Фурье

3 Частотная передаточная функция

4 Амплитудно-фазовая частотная характеристика (АФЧХ)

5 Амплитудно-частотная характеристика (АЧХ)

6 Фазочастотная характеристика (ФЧХ)

7 Пример определения частотных характеристик

8 Практическое значение частотных характеристик

Понятие частотных характеристик системы

$$x(t) = A_{\text{вх}} \sin(\omega t) \quad \rightarrow y(t) = A_{\text{вых}} \sin(\omega t + \varphi)$$

После завершения переходного процесса выход сохраняет частоту входа, но может изменить амплитуду и фазу

Амплитуда

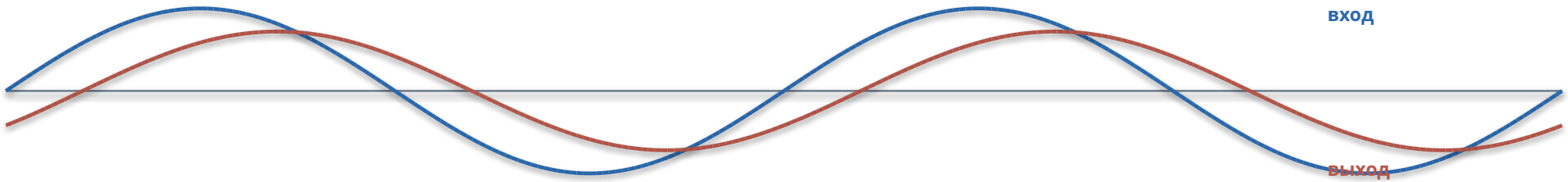
Система усиливает или ослабляет гармонический сигнал.

Фаза

Выход может опережать или отставать от входного сигнала.

Частота

Изменение ω позволяет исследовать реакцию на медленные и быстрые воздействия.



Связь преобразования Лапласа и преобразования Фурье

$$F(s) = \int_0^\infty f(t)e^{-st}\,dt$$

Одностороннее преобразование Лапласа

$$s = \sigma + j\omega$$

Комплексная переменная

$$\boxed{F(j\omega) = \int_0^\infty f(t)e^{-j\omega t}\,dt}$$

Получаем при σ = 0, если интеграл существует

Главная идея

Преобразование Фурье можно рассматривать как частный случай преобразования Лапласа — переход к мнимой оси комплексной плоскости.

Важное условие

Переход допустим не всегда: W(s) должна быть определена на мнимой оси; для установившейся гармонической реакции требуются условия устойчивости.

Преобразование Лапласа: анализ динамики и начальных условий
Преобразование Фурье: анализ частотных составляющих

Частотная передаточная функция

$$W(s) = \frac{Y(s)}{X(s)} \Rightarrow W(j\omega) = \frac{Y(j\omega)}{X(j\omega)}$$

Подстановка s = jω в передаточную функцию, если она определена на мнимой оси

АЛГЕБРАИЧЕСКАЯ ФОРМА

$$W(j\omega)=P(\omega)+jQ(\omega)$$

P — действительная часть; Q — мнимая часть

ПОКАЗАТЕЛЬНАЯ ФОРМА

$$W(j\omega) = A(\omega)e^{j\varphi(\omega)}$$

A — модуль; φ — аргумент (фазовый сдвиг)

Алгебраическая форма

Удобна для выделения координат на комплексной плоскости.

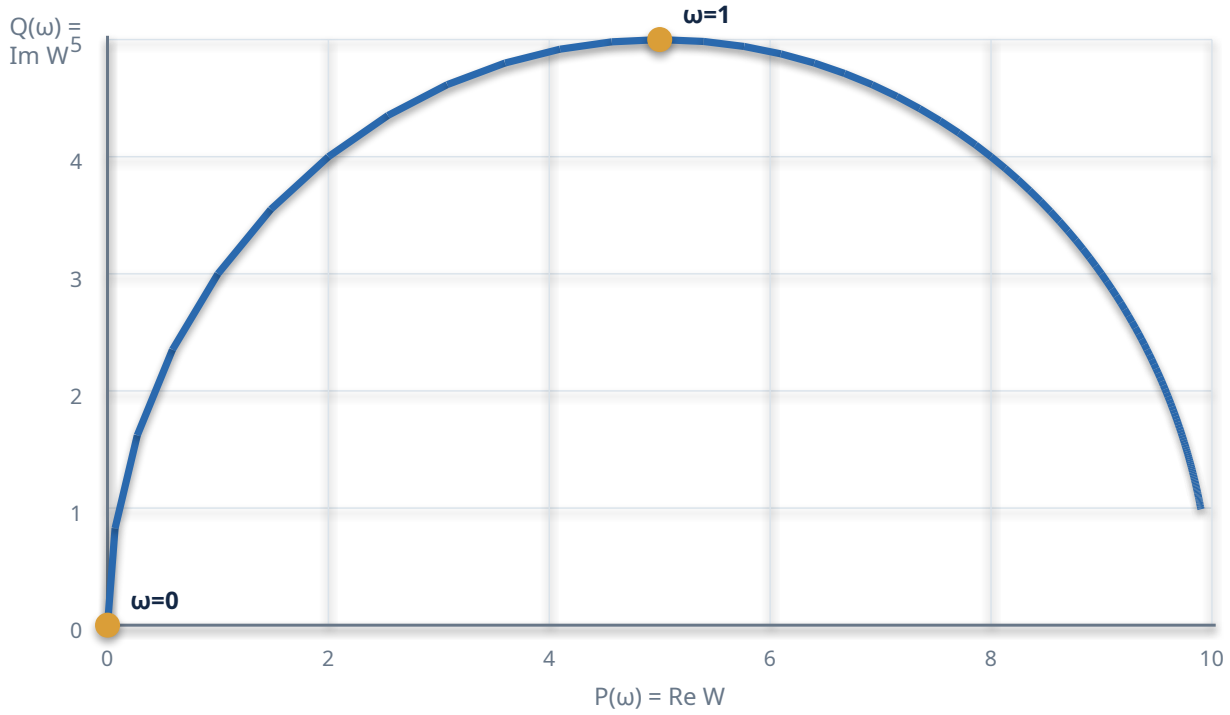
Показательная форма

Непосредственно показывает амплитудное усиление и фазовый сдвиг системы.

Амплитудно-фазовая частотная характеристика (АФЧХ)

$$W(j\omega)=P(\omega)+jQ(\omega)$$

Каждой частоте соответствует точка на комплексной плоскости



Годограф

Геометрическое место точек W(jω), получаемое при изменении частоты.

Модуль

Длина вектора от начала координат до точки W(jω): A(ω)=|W(jω)|.

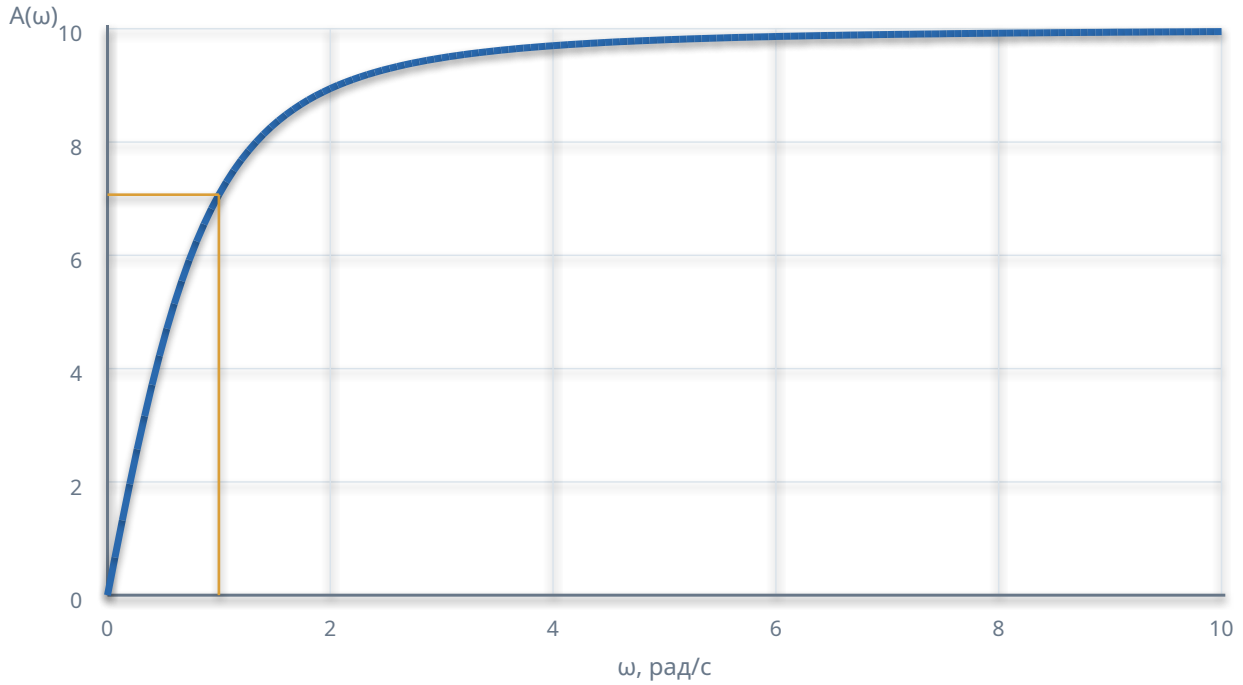
Фаза

Угол этого вектора с положительным направлением действительной оси: φ(ω)=arg W(jω).

Амплитудно-частотная характеристика (АЧХ)

$$A(\omega) = \sqrt{P^2(\omega) + Q^2(\omega)}$$

Отношение амплитуд выходного и входного гармонических сигналов



Усиление

A(ω)>1 — усиление; A(ω)<1 — ослабление; A(ω)=1 — амплитуды равны.

Резонанс

Максимум АЧХ на частоте ωr называется резонансом; выраженный пик указывает на склонность к колебаниям.

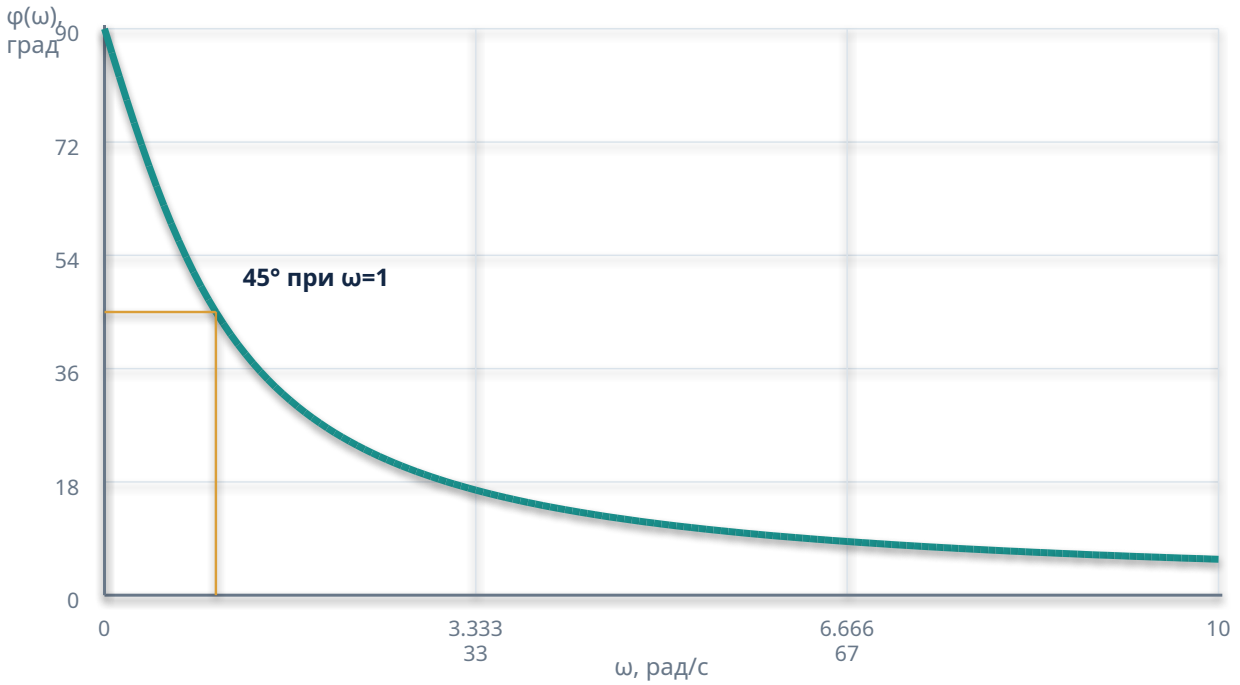
Полоса пропускания

Для НЧ-системы граничный уровень часто принимают A(ωb)=A(0)/√2 ≈ 0,707A(0), то есть −3 дБ.

Фазочастотная характеристика (ФЧХ)

$$\varphi(\omega)=\arg W(j\omega)$$

Зависимость фазового сдвига выходного сигнала относительно входного от частоты



Отрицательная фаза

Выход отстаёт от входного сигнала.

Положительная фаза

Выход опережает входной сигнал.

Значение для управления

Фазовые сдвиги влияют на условия возникновения колебаний и запас устойчивости.

Пример определения частотных характеристик

$$W(s) = \frac{10s}{s+1} \Rightarrow W(j\omega) = \frac{10j\omega}{j\omega+1}$$

Модель из лекции — фильтр верхних частот первого порядка

Действительная часть

$$P(\omega) = \frac{10\omega^2}{1+\omega^2}$$

Мнимая часть

$$Q(\omega) = \frac{10\omega}{1+\omega^2}$$

АЧХ и ФЧХ

$$A(\omega) = \frac{10\omega}{\sqrt{1+\omega^2}}$$

$$\boxed{\varphi(\omega) = \frac{\pi}{2} - \operatorname{arctg}\omega}, \omega > 0$$

ω, рад/с	P(ω)	Q(ω)
0	0	0
0,25	0,588	2,353
0,5	2,000	4,000
1	5,000	5,000
2	8,000	4,000
5	9,615	1,923
10	9,901	0,990

Пределы

A(0)=0; A(∞)=10. Низкие частоты подавляются, высокие проходят.

Срез и фаза

При ω=1: A=7,071≈0,707·10; φ=45°. Частота среза — 1 рад/с.

Практическое значение частотных характеристик

Передача сигналов

Определение частот, которые система усиливает, ослабляет или пропускает.

Колебания и резонанс

Выявление частот, на которых возможно усиление колебаний и появление резонансного пика.

Устойчивость обратной связи

Оценка запасов устойчивости по амплитуде и фазе.

Настройка регуляторов

Оценка влияния регулятора и выбор параметров корректирующих устройств.

АФЧХ + АЧХ + ФЧХ = три представления одной $W(j\omega)$

Каждая форма показывает разные стороны частотного поведения системы

Основные выводы

Частотные характеристики описывают изменение амплитуды и фазы выхода при изменении частоты гармонического входа.

Преобразование Фурье связано с преобразованием Лапласа переходом к мнимой оси $s=j\omega$ при существовании соответствующих интегралов.

Частотная передаточная функция $W(j\omega)$ может быть представлена через $P(\omega)$, $Q(\omega)$, модуль $A(\omega)$ и фазу $\varphi(\omega)$.

АФЧХ показывает комплексный годограф; АЧХ — усиление по частоте; ФЧХ — фазовый сдвиг.

Частотный анализ применяется для оценки резонанса, полосы пропускания и запасов устойчивости.

Контрольные вопросы

- Что показывают частотные характеристики системы?
- Как изменяется выход при гармоническом входе?
- Как связаны преобразования Лапласа и Фурье?
- Как получить $W(j\omega)$ из $W(s)$?
- Что такое АФЧХ и как строится годограф?
- Какой физический смысл имеют $P(\omega)$ и $Q(\omega)$?
- Что показывает АЧХ и как она вычисляется?
- Что показывает ФЧХ и как определяется фазовый сдвиг?
- Что такое резонансная частота, частота среза и полоса пропускания?
- Как применяют частотные характеристики при анализе устойчивости?

Список использованной литературы

1. Бесекерский В. А., Попов Е. П. Теория систем автоматического регулирования. — М.: Наука, 1975.

2. Ким Д. П. Теория автоматического управления. Т. 1. Линейные системы. — М.: Физматлит, 2003.

3. Кузовков Н. Т. Теория автоматического управления. — М.: Высшая школа, 1990.

4. Ogata K. Modern Control Engineering. — 5th ed. — Prentice Hall, 2010.

5. Dorf R. C., Bishop R. H. Modern Control Systems. — 13th ed. — Pearson, 2017.

6. Nise N. S. Control Systems Engineering. — 8th ed. — Wiley, 2019.