КАЗАХСКИЙ НАЦИОНАЛЬНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ ИМ. АЛЬ-ФАРАБИ

Регуляторы систем автоматического управления

Теория линейных систем автоматического управления

Лекция 8 • Нұрғалиев М.К. • Алматы

Цель и план лекции

Цель

Изучить П- и ПД-регулирование, влияние регуляторов на устойчивость и расчёт установившейся ошибки.

Объект

Механический объект с двойным интегрированием: $W_0(s)=1/s^2$.

Основной метод

Характеристическое уравнение и теорема о конечном значении.

ДЕВЯТЬ ПУНКТОВ ПЛАНА — ДЕВЯТЬ ОТДЕЛЬНЫХ СОДЕРЖАТЕЛЬНЫХ СЛАЙДОВ

01 Назначение регуляторов в системах автоматического управления

02 Структура замкнутой системы автоматического управления

03 Исследуемый объект управления

04 Управление объектом с помощью П-регулятора

05 Установившаяся ошибка и теорема о конечном значении

06 Управление объектом с помощью ПД-регулятора

07 Влияние коэффициентов ПД-регулятора на переходный процесс

08 Установившаяся ошибка ПД-регулятора

09 Анализ устойчивости замкнутой системы

Назначение регуляторов в системах автоматического управления

$$e(t)=g(t)-y(t)$$

Ошибка — разность заданного и фактического значений

Что делает регулятор

Формирует управляющее воздействие u(t) на основании текущей ошибки регулирования.

Основные задачи

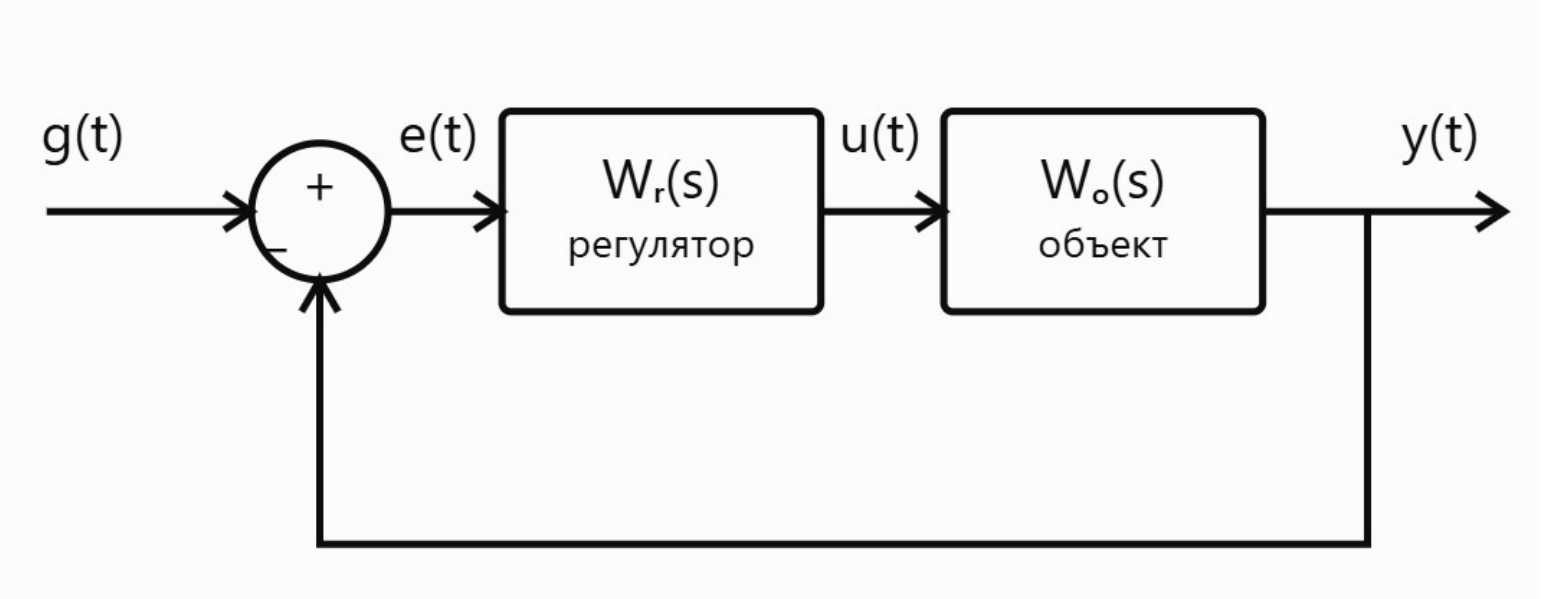
Обеспечить устойчивость, уменьшить ошибку, сформировать нужный переходный процесс и компенсировать возмущения.

ОСНОВНЫЕ ЗАКОНЫ РЕГУЛИРОВАНИЯ

П	$u = K_{\text{p}} e$
И	$u = K_{\text{i}} \int e \, dt$
Д	$u = K d\dot{e}$
ПИ	$P + I$
ПД	$P + D$
ПИД	$P + I + D$

Структура замкнутой системы автоматического управления

ЕДИНИЧНАЯ ОТРИЦАТЕЛЬНАЯ ОБРАТНАЯ СВЯЗЬ



$$W_{\text{раз}}(s) = W_r(s)W_o(s)$$

Передаточная функция разомкнутой системы

$$W_{\text{зам}}(s) = \frac{W_{\text{раз}}(s)}{1 + W_{\text{раз}}(s)}$$

Передаточная функция по заданию

Исследуемый объект управления

$$\ddot{x}(t) = u(t)$$

Уравнение движения при единичной массе и отсутствии трения

$$W_o(s) = \frac{X(s)}{U(s)} = \frac{1}{s^2}$$

Два последовательно соединённых интегрирующих звена

$$s^2 = 0 \;\Rightarrow\; s_1 = s_2 = 0$$

Корни характеристического уравнения

Физический смысл

Вход — управляющая сила (при единичной массе); выход — положение объекта.

Вывод об устойчивости

При ненулевой начальной скорости положение меняется линейно и неограниченно. Объект не является асимптотически устойчивым.

Управление объектом с помощью П-регулятора

$$u(t) = K_p e(t)$$

Пропорциональный закон регулирования

$$W_r(s) = K_p$$

Передаточная функция П-регулятора

$$W_{раз}(s) = \frac{K_p}{s^2}$$

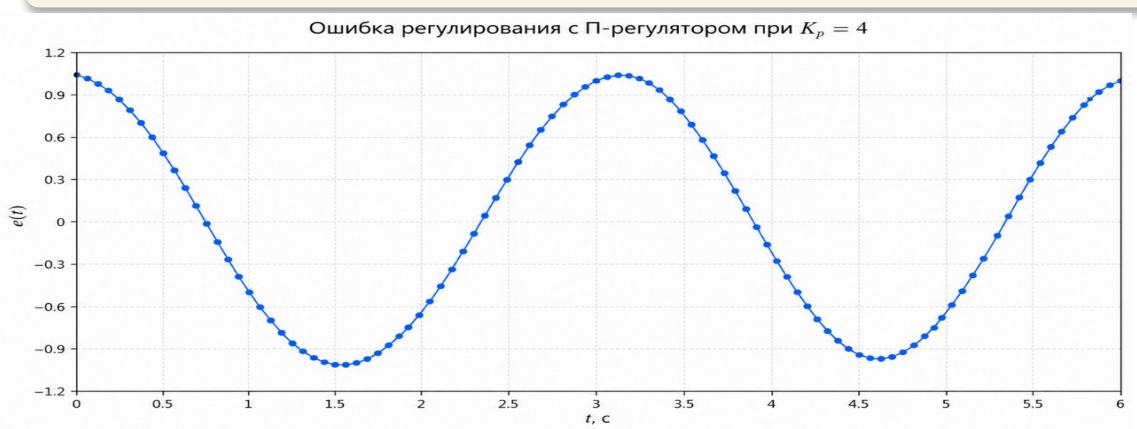
Разомкнутая система

$$W_{зам}(s) = \frac{K_p}{s^2 + K_p}$$

Замкнутая система

$$s^2 + K_p = 0 \Rightarrow s_{1,2} = \pm j\sqrt{K_p}$$

Полюса лежат на мнимой оси — асимптотическая устойчивость не обеспечивается



Результат для K_p=4

Ошибка e(t)=cos(2t) совершает незатухающие колебания. Увеличение K_p изменяет частоту, но не вызывает затухания.

Установившаяся ошибка и теорема о конечном значении

$$\lim_{t\to\infty} f(t) = \lim_{s\to 0} sF(s)$$

Теорема о конечном значении — при выполнении условий применимости

Условие применимости

Полюса sF(s) должны находиться в открытой левой полуплоскости; допустимы устранимые особенности в нуле.

Преимущество

Установившееся значение находится непосредственно по изображению Лапласа — без полного обратного преобразования.

$$E(s) = \frac{g_0 s}{s^2 + K_p}$$

Для ступенчатого задания при П-регуляторе

$$\lim_{s\to 0} \frac{g_0 s^2}{s^2 + K_p} = 0$$

Предел формально равен нулю, но...

$$e(t) = g_0 \cos\left(\sqrt{K_p}\, t\right)$$

Управление объектом с помощью ПД-регулятора

$$u(t) = K_p e(t) + K_d \dot{e}(t)$$

Пропорциональная и дифференциальная составляющие

$$W_{PD}(s) = K_p + K_d s$$

Передаточная функция ПД-регулятора

$$W_{\text{раз}}(s) = \frac{K_d s + K_p}{s^2}$$

Разомкнутая система

$$W_{\text{зам}}(s) = \frac{K_d s + K_p}{s^2 + K_d s + K_p}$$

Замкнутая система

Роль K_p

Формирует воздействие, пропорциональное текущей ошибке; влияет на собственную частоту системы.

Роль K_d

Добавляет демпфирование и влияет на степень затухания колебаний.

$$s^2 + K_d s + K_p = 0$$

Характеристическое уравнение замкнутой системы

Влияние коэффициентов ПД-регулятора на переходный процесс

$$D = K_d^2 - 4K_p$$

Дискриминант характеристического уравнения

$$\omega_n = \sqrt{K_p} \quad \xi = \frac{K_d}{2\sqrt{K_p}}$$

Собственная частота и коэффициент демпфирования

D<0: комплексные корни

Переходный процесс колебательный, амплитуда затухает.

D=0: совпадающие корни

Режим критического демпфирования; граница между колебательным и апериодическим режимами.

D>0: вещественные корни

При положительных K_p и K_d корни отрицательные; переходный процесс апериодический.

$$K_p > 0, K_d > 0$$

Условия асимптотической устойчивости системы второго порядка

Увеличение K_d повышает демпфирование; изменение K_p меняет собственную частоту и также влияет на форму отклика.

Определение установившейся ошибки ПД-регулятора

$$W_e(s) = \frac{1}{1 + W_{\text{раз}}(s)}$$

Передаточная функция по ошибке

$$W\text{раз}(s) = \frac{K_\text{p} + K_d s}{s^2}$$

Для объекта $W_0(s)=1/s^2$

$$E(s) = \frac{g_0 s}{s^2 + K_d s + K_p}$$

При ступенчатом задании $G(s)=1/s$

$$e_{\text{уст}} = \lim_{s \to 0} \frac{g_0 s^2}{s^2 + K_d s + K_p}$$

Нулевой предел при $K_p>0$ и устойчивой замкнутой системе

Вывод

ПД-регулятор обеспечивает асимптотическую устойчивость и нулевую установившуюся ошибку при постоянном задании — при положительных K_p и K_d.

Анализ устойчивости замкнутой системы

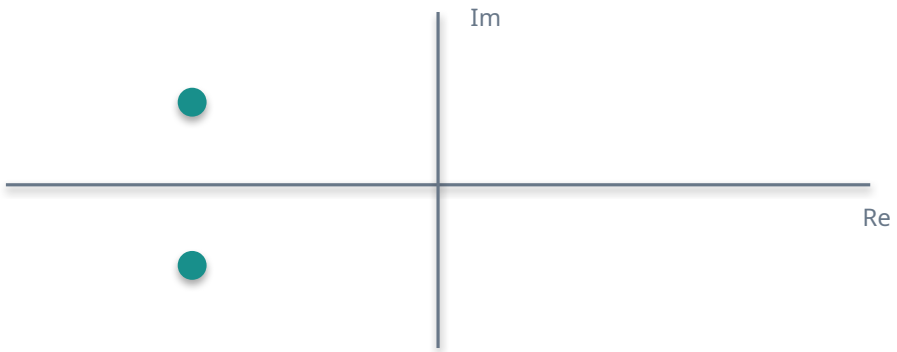
$$s^2 + K_d s + K_\text{p} = 0$$

Характеристическое уравнение ПД-системы

$$s_{1,2} = -\frac{K_d}{2} \pm \tfrac{1}{2}\sqrt{K_d^2 - 4K_\text{p}}$$

Корни характеристического уравнения

РАСПОЛОЖЕНИЕ ПОЛЮСОВ ПРИ $K_p>0$, $K_d>0$



Оба корня в левой полуплоскости

Критерий устойчивости

Для системы второго порядка: все коэффициенты характеристического полинома должны быть положительными.

П-регулятор

$s^2+K_p=0$: чисто мнимые корни; асимптотической устойчивости нет.

ПД-регулятор

$K_p>0$ и $K_d>0$: корни имеют отрицательные действительные части; система асимптотически устойчива.

Основные выводы

Регулятор использует ошибку $e(t)=g(t)-y(t)$ для формирования управляющего воздействия.

Рассматриваемый объект $W_0(s)=1/s^2$ сам по себе не является асимптотически устойчивым.

П-регулятор приводит к чисто мнимым полюсам и незатухающим колебаниям ошибки.

ПД-регулятор формирует характеристическое уравнение $s^2 + K_d s + K_\text{p} = 0$.

При $K_\text{p}>0$ и $K_d>0$ замкнутая система асимптотически устойчива.

Для ступенчатого задания установившаяся ошибка ПД-системы равна нулю; теорема о конечном значении применима только после проверки полюсов.

Контрольные вопросы

- Для чего предназначен регулятор в системе автоматического управления?
- Как определяется ошибка регулирования?
- Почему объект с $W_0(s)=1/s^2$ не является асимптотически устойчивым?
- Почему П-регулятор вызывает незатухающие колебания в рассматриваемой системе?
- Как дифференциальный регулятор влияет на динамику объекта?
- Почему Д-регулятор не может самостоятельно обеспечить требуемое положение?
- Как формируется управляющее воздействие ПД-регулятора?
- При каких условиях ПД-система асимптотически устойчива?
- Как K_p и K_d влияют на переходный процесс?
- В чём заключается теорема о конечном значении и когда её нельзя применять?

Список использованной литературы

1. Бесекерский В. А., Попов Е. П. Теория систем автоматического регулирования. — СПб.: Профессия.

2. Ким Д. П. Теория автоматического управления. Линейные системы. — М.: Физматлит.

3. Кузовков Н. Т. Теория автоматического управления. — М.: Высшая школа.

4. Ogata K. Modern Control Engineering. — 5th ed. — Prentice Hall, 2010.

5. Dorf R. C., Bishop R. H. Modern Control Systems. — 13th ed. — Pearson, 2017.

6. Nise N. S. Control Systems Engineering. — 8th ed. — Wiley, 2019.