КАЗАХСКИЙ НАЦИОНАЛЬНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ ИМ. АЛЬ-ФАРАБИ

Модели в переменных состояний. Структурные схемы систем автоматического управления

Теория линейных систем автоматического управления

Лекция 5 • Нұрғалиев М.К. • Алматы

Цель и план лекции

Цель

Освоить метод пространства состояний, матричную форму модели и переходы между передаточной функцией и моделью состояния.

Что описываем

Внутренние переменные, управляющие воздействия и наблюдаемые выходы.

Что освоим

Построение модели, моделирование методом Эйлера и обратное получение W(s).

01 Понятие пространства состояний

02 Переменные состояния динамической системы

03 Уравнения состояния и выхода

04 Преимущества представления в пространстве состояний

05 Переход от передаточной функции к модели в пространстве состояний

06 Преобразование передаточной функции третьего порядка

07 Математическая модель вращательной механической системы

08 Численное решение уравнений состояния

09 Численное решение системы первого порядка методом Эйлера

10 Связь передаточной функции и модели в пространстве состояний

11 Сравнение двух способов представления системы

Понятие пространства состояний

Передаточная функция

Описывает внешнюю связь между входом и выходом системы.

Пространство состояний

Описывает не только вход и выход, но и внутреннюю динамику объекта.

Текущее состояние x(t)

Входное воздействие u(t)

Будущее состояние x(t+Δt)

Состояние — минимально необходимая совокупность переменных, которая вместе с будущим входом определяет дальнейшее поведение системы.

Переменные состояния динамической системы

$$x(t) = [x_1(t), x_2(t), \ldots, x_n(t)]$$

Вектор состояния

$$u(t) = [u_1(t), u_2(t), \ldots, u_m(t)]$$

Вектор управления

$$y(t) = [y_1(t), y_2(t), \ldots, y_p(t)]$$

Вектор выхода

2 переменные состояния

Состояние изображается точкой на плоскости.

3 переменные состояния

Состояние изображается точкой в трёхмерном пространстве.

n переменных

Размерность пространства состояний равна числу независимых переменных состояния.

Уравнения состояния и выхода

$$\dot{x}(t) = A\,x(t) + B\,u(t)$$

Уравнение состояния

$$y(t) = C\,x(t) + D\,u(t)$$

Уравнение выхода

A — матрица состояния

Описывает собственную динамику и взаимосвязи состояний.

B — матрица управления

Показывает влияние входа на изменение состояния.

C — матрица выхода

Связывает состояние с наблюдаемым выходом.

D — прямая передача

Описывает прямое влияние входа на выход; часто D=0.

$$A \in \mathbb{R}^{n \times n} \quad B \in \mathbb{R}^{n \times m} \quad C \in \mathbb{R}^{p \times n} \quad D \in \mathbb{R}^{p \times m}$$

n — число состояний; m — число входов; p — число выходов

Преимущества представления в пространстве состояний

Многомерность (MIMO)

Одновременно описывает несколько входных и выходных сигналов.

Внутренняя динамика

Позволяет анализировать переменные состояния, не представленные непосредственно в передаточной функции.

Широкая применимость

Может использоваться для нелинейных и нестационарных моделей.

Современные методы управления

Основа наблюдателей состояния, фильтров Калмана, оптимального и прогнозирующего управления.

$$\dot{x} = f(x,u,t), \quad y = g(x,u,t)$$

Общая нелинейная и/или нестационарная форма

Переход от передаточной функции к модели в пространстве состояний

$$W(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{b_m s^m + b_{m-1} s^{m-1} + \cdots + b_1 s + b_0}{a_n s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \cdots + a_1 s + a_0}$$

Для правильной передаточной функции степень числителя не превышает степень знаменателя

1 Передаточная функция

2 Дифференциальное уравнение

3 Ввести переменные состояния

4 Система уравнений первого порядка

5 Матрицы A, B, C, D

Основная идея

Уравнение высокого порядка заменяется системой уравнений первого порядка.

Важное замечание

Одна W(s) может иметь несколько эквивалентных реализаций в пространстве состояний.

Преобразование передаточной функции третьего порядка

$$W(s) = \frac{s^2+2s+3}{4s^3+5s^2+s+2} \Rightarrow \frac{Y(s)}{s^2+2s+3} = \frac{U(s)}{4s^3+5s^2+s+2} \Rightarrow 4s^3X_1(s) + 5s^2X_1(s) + sX_1(s) + 2X_1(s) = U(s)$$

Пример из лекции

ПЕРЕМЕННЫЕ СОСТОЯНИЯ

$$x_1(t) = x_1(t)$$
$$x_2(t) = \dot{x}_1(t)$$
$$x_3(t) = \ddot{x}_1(t)$$

СИСТЕМА УРАВНЕНИЙ

$$x_1^{(3)} = -\frac{1}{2}x_1 - \frac{1}{4}\dot{x}_1 - \frac{5}{4}\ddot{x}_1 + \frac{1}{4}u(t)$$

МАТРИЧНАЯ МОДЕЛЬ

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = x_3 \\ \dot{x}_3 = -\frac{1}{2}x_1 - \frac{1}{4}x_2 - \frac{5}{4}x_3 + \frac{1}{4}u \end{cases} \Rightarrow \begin{pmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -\frac{1}{2} & -\frac{1}{4} & -\frac{5}{4} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{1}{4} \end{pmatrix} u(t)$$

Преобразование передаточной функции третьего порядка

$$X_1(s) = \frac{Y(s)}{s^2 + 2s + 3} \Rightarrow Y(s) = s^2 X_1(s) + 2sX_1(s) + 3X_1(s)$$

Пример из лекции

ПЕРЕМЕННЫЕ СОСТОЯНИЯ

$$x_1(t) = x_1(t)$$

$$x_2(t) = \dot{x_1}(t)$$

$$x_3(t) = \ddot{x_1}(t)$$

СИСТЕМА УРАВНЕНИЙ

$$y(t) = \ddot{x_1}(t) + 2\dot{x_1}(t) + 3x_1(t)$$

МАТРИЧНАЯ МОДЕЛЬ

$$y(t) = (3 \quad 2 \quad 1)\begin{pmatrix} x_{1(t)} \\ x_{2(t)} \\ x_{3(t)} \end{pmatrix}$$

Преобразование передаточной функции третьего порядка

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t) \\ y(t) = Cx(t) + Du(t) \end{cases}$$

Матрица	Значение	Назначение
A	$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -0.5 & -0.25 & -1.25 \end{pmatrix}$	Матрица состояния
B	$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0.25 \end{pmatrix}$	Матрица управления
C	$(3 \quad 2 \quad 1)$	Матрица выхода
D	0	Матрица прямой передачи

Матрица	Значение	Назначение
A	$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -0.5 & -0.25 & -1.25 \end{pmatrix}$	Матрица состояния
B	$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0.25 \end{pmatrix}$	Матрица управления
C	$(3 \quad 2 \quad 1)$	Матрица выхода
D	0	Матрица прямой передачи

Матрица	Значение	Назначение
A	$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -0.5 & -0.25 & -1.25 \end{pmatrix}$	Матрица состояния
B	$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0.25 \end{pmatrix}$	Матрица управления
C	$(3 \quad 2 \quad 1)$	Матрица выхода
D	0	Матрица прямой передачи

Матрица	Значение	Назначение
A	$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -0.5 & -0.25 & -1.25 \end{pmatrix}$	Матрица состояния
B	$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0.25 \end{pmatrix}$	Матрица управления
C	$(3 \quad 2 \quad 1)$	Матрица выхода
D	0	Матрица прямой передачи

Матрица	Значение	Назначение
A		Матрица состояния
B		Матрица управления
C		Матрица выхода
D	0	Матрица прямой передачи

Численное решение уравнений состояния

$$\dot{x}(t) = A\,x(t) + B\,u(t)$$

Задача Коши: найти x(t) при заданном начальном состоянии x(0)

Шаг 1. Производная

$$\dot{x}(t) \approx \frac{x(t+\Delta t) - x(t)}{\Delta t}$$

Шаг 2. Приращение

$$x(t+\Delta t) \approx x(t) + \dot{x}(t)\Delta t$$

Шаг 3. Подстановка модели

$$x(t+\Delta t) \approx x(t) + [Ax(t) + Bu(t)]\Delta t$$

$$x_{k+1} = x_k + \Delta t(Ax_k + Bu_k)$$

Явный метод Эйлера для линейной системы в пространстве состояний

Численное решение системы первого порядка методом Эйлера

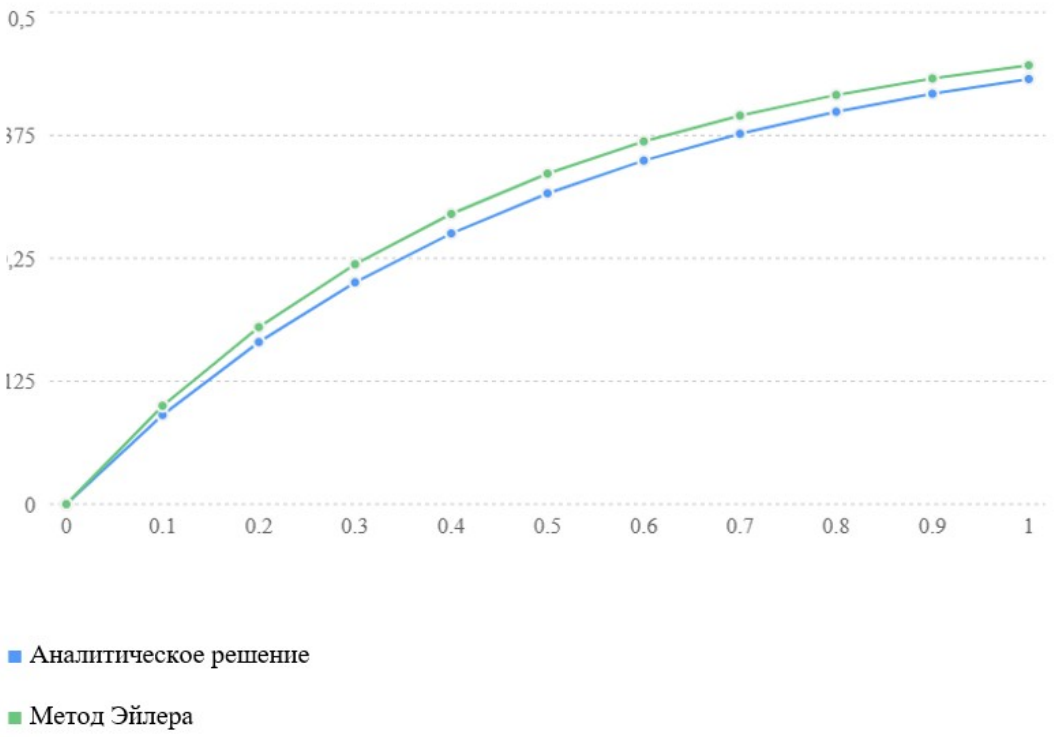
$$\dot{x} = -2x + u, \quad x(0)=0, \quad u=1, \quad \Delta t=0{,}1$$

Пример из лекции

$$x_{k+1} = 0{,}8x_k + 0{,}1$$

Разностная формула метода Эйлера

t, с	xЭйлер(t)
0,0	0,0000
0,1	0,1000
0,2	0,1800
0,3	0,2440
0,4	0,2952
0,5	0,3362



Сравнение передаточной функции и модели в пространстве состояний

Критерий	Передаточная функция	Пространство состояний
Представление	$W(s)=Y(s)/U(s)$	$\dot{x}=Ax+Bu;$ $y=Cx+Du$
Область описания	Операторная	Временная
Внутренние переменные	Непосредственно не представлены	Представлены явно
Начальные условия	При определении W(s) нулевые	Учитываются непосредственно
Многомерные системы	Матрица передаточных функций	Единая матричная модель
Нелинейные системы	Обычная W(s) глобально неприменима	Возможна нелинейная модель
Применение	Частотный анализ, устойчивость	Наблюдатели, оценивание, моделирование

Основные выводы

Пространство состояний описывает внутреннюю динамику объекта через набор переменных состояния.

Линейная стационарная модель задаётся уравнениями $\dot{x}=Ax+Bu$ и $y=Cx+Du$.

Передаточную функцию можно преобразовать в систему уравнений первого порядка;

Метод Эйлера позволяет численно интегрировать модель, но шаг Δt влияет на точность и устойчивость расчёта.

Модель пространства состояний полезна для MIMO-систем, оценивания состояния и современных алгоритмов управления.

Контрольные вопросы

- Что называется пространством состояний динамической системы?
- Какие переменные называются переменными состояния?
- В чём отличие передаточной функции от модели состояния?
- Как записываются уравнения состояния и выхода?
- Какую роль выполняют матрицы A, B, C и D?
- Как перейти от уравнения высокого порядка к уравнениям первого порядка?
- Почему одной W(s) могут соответствовать разные модели состояния?
- Как записывается модель вращательной механической системы?
- В чём заключается принцип метода Эйлера?
- Как определить W(s) по матрицам модели состояния?

Список использованной литературы

1. Бесекерский В. А., Попов Е. П. Теория систем автоматического регулирования. — М.: Наука, 1975.

2. Ким Д. П. Теория автоматического управления. Т. 1. Линейные системы. — М.: Физматлит, 2003.

3. Кузовков Н. Т. Теория автоматического управления. — М.: Высшая школа, 1990.

4. Ogata K. Modern Control Engineering. — 5th ed. — Prentice Hall, 2010.

5. Dorf R. C., Bishop R. H. Modern Control Systems. — 13th ed. — Pearson, 2017.

6. Nise N. S. Control Systems Engineering. — 8th ed. — Wiley, 2019.