КАЗАХСКИЙ НАЦИОНАЛЬНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ ИМ. АЛЬ-ФАРАБИ

Преобразование Лапласа. Передаточная функция.

Временные характеристики системы

Теория линейных систем автоматического управления

Лекция 3 • Нұрғалиев М.К. • Алматы

ВРЕМЕННАЯ ОПЕРАТОРНАЯ ОБЛАСТИ

Цель и план лекции

Цель

Освоить преобразование Лапласа, понятие передаточной функции и методы получения временных характеристик.

Основное допущение

Линейная стационарная система рассматривается при нулевых начальных условиях.

Результат

Переходить от дифференциальной модели к операторной и обратно.

СТРУКТУРА: ЧЕТЫРЕ ПУНКТА ПЛАНА — ЧЕТЫРЕ ТЕМАТИЧЕСКИХ СЛАЙДА

01 Преобразование Лапласа

02 Передаточная функция системы

03 Связь передаточной функции с импульсной характеристикой

04 Связь передаточной функции и переходной характеристики

Преобразование Лапласа

$$(s) = \mathcal{L}\{f(t)\} = \int_{0}^{+\infty} f(t)e^{-st}dt$$

Одностороннее преобразование Лапласа

Оригинал f(t)

Функция времени, заданная во временной области.

Изображение F(s)

Функция комплексной переменной s в операторной области.

Переменная s

Комплексная переменная, используемая при анализе системы.

ВРЕМЕННАЯ ОБЛАСТЬ

Дифференцирование d/dt

Лаплас

обратное $\mathscr{L}^{-1}$

ОПЕРАТОРНАЯ ОБЛАСТЬ

Умножение на s

Передаточная функция системы

$$W(s) = \frac{X(s)}{U(s)}$$

Отношение изображения выхода к изображению входа при нулевых начальных условиях

ВЫВОД ИЗ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ

$$2\dot{x}(t) + x(t) = u(t)$$

$$2sX(s) + X(s) = U(s)$$

$$W(s) = \frac{X(s)}{U(s)} = \frac{1}{2s+1}$$

Стандартная форма

$$W(s) = \frac{K}{Ts+1}$$

Параметры модели

K = 1 — статический коэффициент передачи; T = 2 — постоянная времени.

Смысл

W(s) описывает динамику системы и не зависит от конкретного входа.

Связь передаточной функции с импульсной характеристикой

$$W(s) = \mathcal{L}^{-1}\{w(t)\}.$$

Передаточная функция является преобразованием Лапласа импульсной характеристики

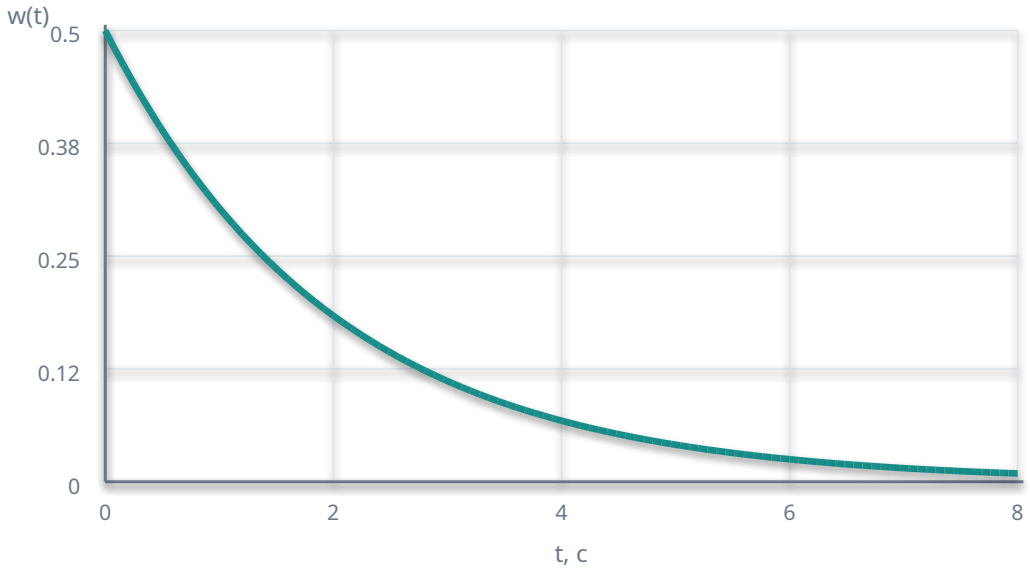
ИМПУЛЬСНАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА

$$w(t) = \frac{1}{2}e^{-t/2}$$

$$W(s) = \int_0^{\infty} \frac{1}{2}e^{-t/2}\, e^{-st}\, dt$$

$$\boxed{W(s) = \frac{1}{2s+1}}$$

ГРАФИК w(t)



Область сходимости: Re(s) > −½

Связь передаточной функции и переходной характеристики

$$H(s) = W(s) \cdot 1/s$$

Для единичного ступенчатого воздействия 1(t), изображение которого равно 1/s

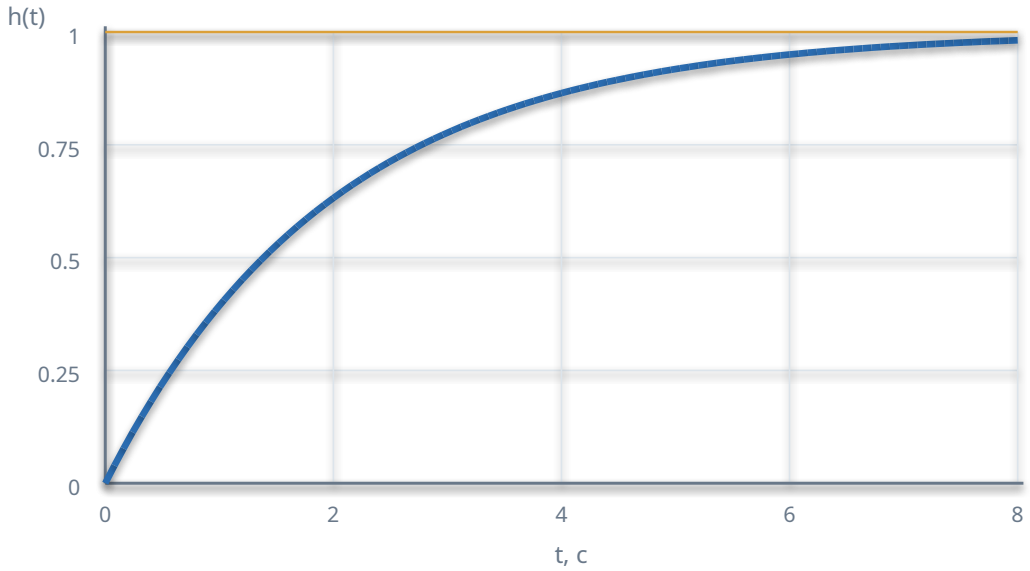
ОПЕРАТОРНАЯ ОБЛАСТЬ

$$H(s) = 1/[s(2s+1)]$$

$$H(s) = 1/s - 2/(2s+1)$$

$$h(t) = 1 - e^{(-t/2)}$$

ПЕРЕХОДНАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА h(t)



Установившееся значение: h(∞) = 1

Основные выводы

Преобразование Лапласа переводит дифференциальные уравнения во временной области в алгебраические уравнения операторной области.

Передаточная функция W(s) определяется отношением X(s)/U(s) при нулевых начальных условиях.

Передаточная функция является преобразованием Лапласа импульсной характеристики.

Переходная характеристика находится через произведение W(s) на изображение единичной ступени 1/s и обратное преобразование Лапласа.

Контрольные вопросы

- Что такое преобразование Лапласа и для чего оно применяется?
- В чём преимущество перехода от дифференциальных уравнений к алгебраическим?
- Что называют оригиналом и изображением функции?
- Как определяется передаточная функция линейной стационарной системы?
- Почему передаточная функция определяется при нулевых начальных условиях?
- Как получить W(s) по дифференциальному уравнению?
- Какая связь существует между W(s) и импульсной характеристикой?
- Как получить изображение переходной характеристики?
- Зачем требуется разложение на простейшие дроби?

Список использованной литературы

1. Бесекерский В. А., Попов Е. П. Теория систем автоматического регулирования. — М.: Наука, 1975.
2. Ким Д. П. Теория автоматического управления. Т. 1. Линейные системы. — М.: Физматлит, 2003.
3. Кузовков Н. Т. Теория автоматического управления. — М.: Высшая школа, 1990.
4. Ogata K. Modern Control Engineering. — 5th ed. — Prentice Hall, 2010.
5. Dorf R. C., Bishop R. H. Modern Control Systems. — 13th ed. — Pearson, 2017.
6. Nise N. S. Control Systems Engineering. — 8th ed. — Wiley, 2019.