КАЗАХСКИЙ НАЦИОНАЛЬНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ ИМ. АЛЬ-ФАРАБИ

Линеаризация нелинейных систем автоматического управления

Теория линейных систем автоматического управления

Лекция 9 • Нұрғалиев М.К. • Алматы

Цель и план лекции

Цель

Получить линейную модель нелинейного объекта и исследовать влияние регуляторов на устойчивость и точность.

Объект

Резервуар с входным и выходным потоками жидкости.

Методы

Ряд Тейлора, материальный баланс, преобразование Лапласа и теорема о конечном значении.

13 ПУНКТОВ ПЛАНА — 13 ОТДЕЛЬНЫХ СОДЕРЖАТЕЛЬНЫХ СЛАЙДОВ

01 Линейные и нелинейные системы автоматического управления

02 Понятие линеаризации

03 Линеаризация функции нескольких переменных

04 Пример линеаризации алгебраической зависимости

05 Составление дифференциального уравнения резервуара

06 Определение рабочей точки

07 Линеаризация дифференциального уравнения резервуара

08 Получение передаточной функции объекта управления

09 Разработка системы автоматического регулирования уровня жидкости

10 Исследование П-регулятора

11 Исследование ПД-регулятора

12 Исследование ПИД-регулятора

13 Сравнительный анализ регуляторов по теореме о конечном значении

Линейные и нелинейные системы автоматического управления

$$\dot{y}(t) = f\big(y(t), u(t)\big)$$

Общее представление динамики объекта

Линейная система

Выполняет принцип суперпозиции: однородность и аддитивность. Реакция на сумму воздействий равна сумме реакций.

Нелинейная система

В общем случае не выполняет принцип суперпозиции. Аналитическое исследование существенно сложнее.

$$L\{\alpha u\} = \alpha L\{u\}$$

Однородность

$$L\{u_1 + u_2\} = L\{u_1\} + L\{u_2\}$$

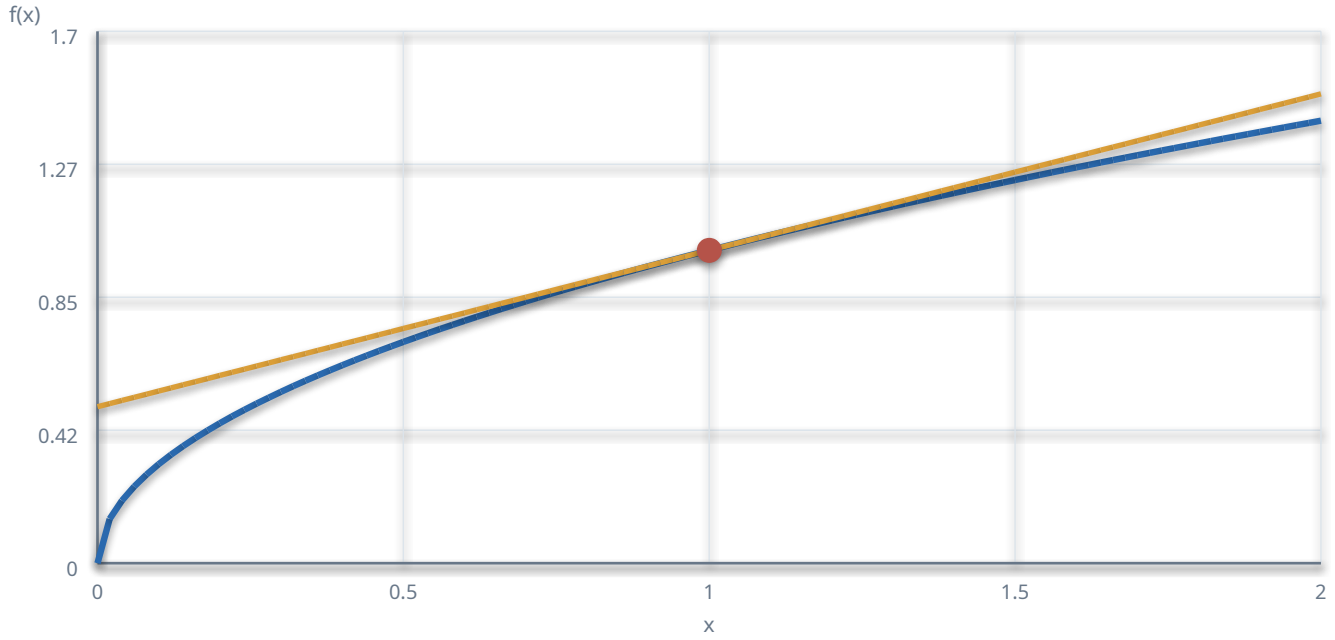
Аддитивность

Линеаризация позволяет заменить нелинейную модель приближённой линейной моделью вблизи выбранного режима работы.

Понятие линеаризации

$$f(x_0 + \Delta x) \approx f(x_0) + f'(x_0)\Delta x$$

Разложение в ряд Тейлора с отбрасыванием членов второго и более высоких порядков



Рабочая точка

Задаёт положение, в окрестности которого нелинейная кривая заменяется касательной.

Область применимости

При удалении от рабочей точки ошибка линеаризации возрастает.

Линеаризованная модель достоверна для малых отклонений от рабочего режима.

Линеаризация функции нескольких переменных

$$\Delta z \approx \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)\Big|_{\mathbf{0}} \Delta x + \left(\frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{y}}\right)\Big|_{\mathbf{0}} \Delta y$$

Частные производные вычисляются в рабочей точке (x_0,y_0)

Функция двух переменных

z=f(x,y); рабочая точка задаётся координатами (x_0,y_0), а Δx и Δy — малыми отклонениями.

Многомерная динамическая система

Линеаризация выполняется через матрицы Якоби по состоянию и управлению.

$$\Delta \dot{\mathbf{x}} = A\Delta x + B\Delta u$$

Линеаризованная модель в отклонениях

$$A = \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)\Big|_{x_0,u_0} \; ; \; B = \left(\frac{\partial f}{\partial u}\right)\Big|_{x_0,u_0}$$

Матрицы Якоби в точке равновесия

Для многомерных систем матрицы A и B содержат частные производные всех уравнений по соответствующим переменным.

Пример линеаризации алгебраической зависимости

$$v = \sqrt{2gh}$$

Закон Торричелли

$$q = \mu S_0 \sqrt{2gh}$$

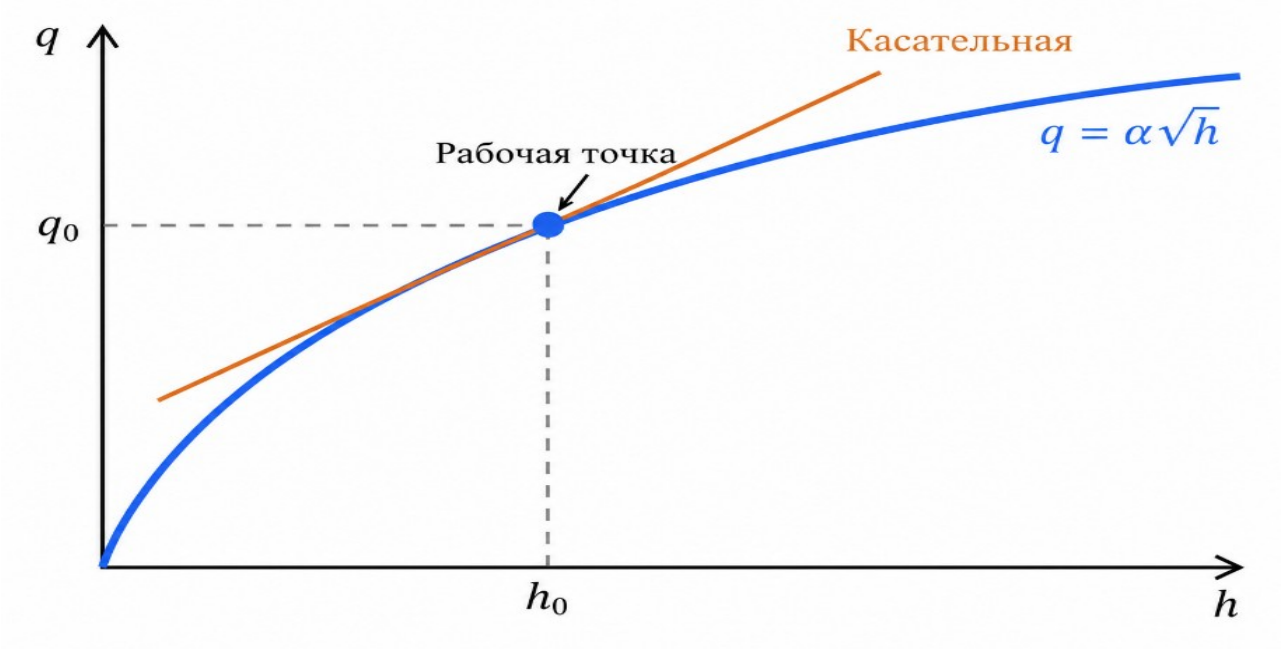
Объёмный расход через отверстие

$h_0=0{,}5;\ \alpha=1$

Параметры примера из лекции

$$q_0 = \sqrt{0{,}5} \approx 0{,}707$$

Расход в рабочей точке



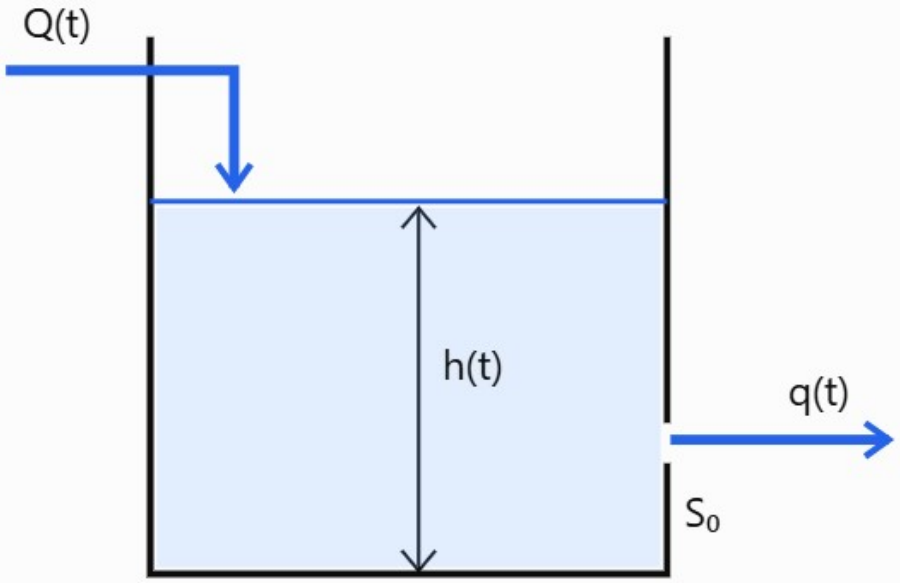
Наклон касательной

$$k = dq/dh|_{h_0} = 1/(2\sqrt{h_0}) = 1/\sqrt{2} \approx 0{,}707.$$

Линейная модель

$$\Delta q \approx 0{,}707 \cdot \Delta h$$

Составление дифференциального уравнения резервуара



$$S\frac{dh(t)}{dt} = Q(t) - q(t)$$

Материальный баланс: накопление = приток − отток

$$q(t) = \alpha\sqrt{h(t)}$$

Нелинейный расход по закону Торричелли

$$\frac{dh}{dt} = \left(\frac{1}{S}\right)\left[Q(t) - \alpha\sqrt{h(t)}\right]$$

Нелинейное дифференциальное уравнение резервуара

Физические параметры

S — площадь поперечного сечения резервуара; Q(t) — входной расход; q(t) — выходной расход; h(t) — уровень жидкости.

Определение рабочей точки

$$\frac{dh}{dt} = 0 \quad \Rightarrow \quad Q^0 = \alpha\sqrt{h^0}$$

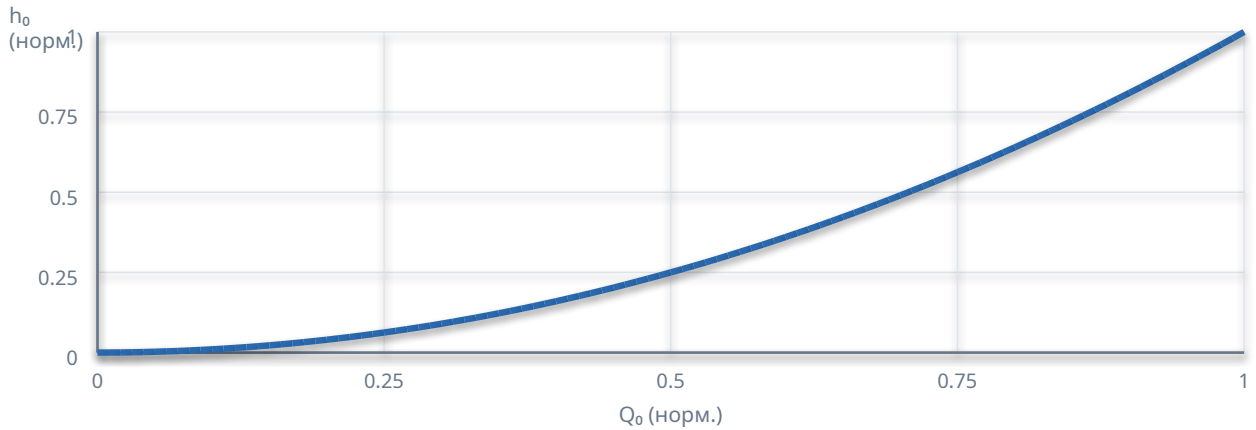
Условие установившегося режима: уровень не изменяется

$$h_0 = (Q_0/\alpha)^2$$

Статическая характеристика резервуара

Физический смысл

Чем больше входной расход Q_0, тем выше установившийся уровень h_0.



Выбор рабочей точки

Для последующей линеаризации выбирают конкретную пару (Q_0,h_0), удовлетворяющую условию равновесия. В лекционном примере для алгебраической зависимости использовано h_0=0,5.

Линеаризация дифференциального уравнения резервуара

$$f(Q,h) = \left(\frac{1}{S}\right)\left[Q - \alpha\sqrt{h}\right]$$

Исходная нелинейная модель в форме dh/dt=f(Q,h)

$$\frac{\partial f}{\partial Q} = \frac{1}{S}$$

Производная по входному расходу

$$\frac{\partial f}{\partial h} = -\frac{\alpha}{2S\sqrt{h}}$$

Производная по уровню

$$kQ = \frac{1}{S}$$

Коэффициент входа

$$kh = \frac{\alpha}{2S\sqrt{h^0}}$$

Коэффициент затухания

$$\frac{d\Delta h}{dt} + kh \cdot \Delta h = kQ \cdot \Delta Q$$

Линеаризованная динамическая модель в отклонениях

Члены второго и более высоких порядков отброшены; модель применима при малых ΔQ и Δh относительно рабочей точки.

Получение передаточной функции объекта управления

$$(s + kh)\Delta H(s) = kQ\Delta Q(s)$$

Преобразование Лапласа при нулевых начальных отклонениях

$$W^0(s) = \frac{\Delta H(s)}{\Delta Q(s)} = \frac{kQ}{s + kh}$$

Передаточная функция резервуара

$$W^0(s) = \frac{K^0}{Ts + 1}$$

Форма апериодического звена первого порядка

$$K^0 = \frac{kQ}{kh} = \frac{2\sqrt{h^0}}{\alpha}$$

Статический коэффициент передачи

$$T = \frac{1}{kh} = \frac{2S\sqrt{h^0}}{\alpha}$$

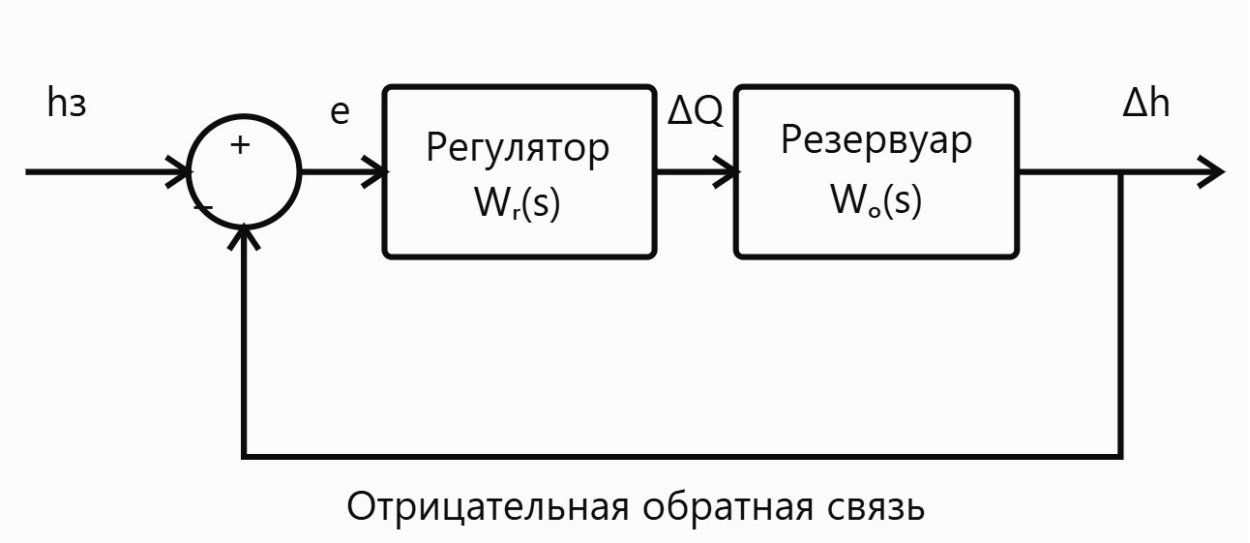
Постоянная времени объекта

Интерпретация

После линеаризации резервуар вблизи установившегося режима эквивалентен апериодическому звену первого порядка.

Разработка системы автоматического регулирования уровня жидкости

ЗАМКНУТАЯ СИСТЕМА С ЕДИНИЧНОЙ ОТРИЦАТЕЛЬНОЙ ОБРАТНОЙ СВЯЗЬЮ



Отрицательная обратная связь

$$W\text{раз} = W_r W_0$$

Разомкнутая система

$$W_e = \frac{1}{1 + W_r W_0}$$

Передаточная функция по ошибке

Исследование П-регулятора

$$W_p(s)=K_p$$

П-регулятор

$$W\text{раз} = K_\text{р}\frac{kQ}{s+kh}$$

Разомкнутая передаточная функция

$$W\text{зам} = K_\text{р}\frac{kQ}{s+kh+K_\text{р}kQ}$$

Замкнутая функция

$$s+kh+K_\text{р}kQ=0$$

Характеристическое уравнение

$$s_\text{р} = -\left(kh+K_\text{р}kQ\right)$$

При $K_p>0$, $kQ>0$ и $kh>0$ корень отрицательный: замкнутая система асимптотически устойчива

$$e\text{уст} = h\text{з}\cdot\frac{kh}{kh+K_\text{р}kQ}$$

Установившаяся ошибка при ступенчатом задании hз

Вывод

П-регулятор обеспечивает устойчивость, но при конечном K_p оставляет ненулевую статическую ошибку.

Основные выводы

Нелинейную модель можно линеаризовать в окрестности установившейся рабочей точки с помощью ряда Тейлора.

Для резервуара закон Торричелли задаёт нелинейный расход $q(h)=\alpha\sqrt{h}$.

Материальный баланс приводит к уравнению $S\cdot dh/dt=Q-\alpha\sqrt{h}$; после линеаризации получается звено первого порядка.

П-регулятор обеспечивает устойчивость, но оставляет ненулевую установившуюся ошибку.

ПД-регулятор меняет переходный процесс, но не устраняет ошибку при постоянном задании.

ПИД-регулятор благодаря интегральной составляющей обеспечивает нулевую установившуюся ошибку при выполнении условий устойчивости.

Контрольные вопросы

- Что отличает линейную систему от нелинейной?
- В чём заключается принцип линеаризации?
- Как ряд Тейлора используется для функции нескольких переменных?
- Почему расход через отверстие зависит от √h?
- Как записывается материальный баланс резервуара?
- Как определяется рабочая точка?
- Как получить линеаризованную модель резервуара?
- Как из линеаризованного уравнения получить передаточную функцию?
- Почему П-регулятор оставляет статическую ошибку?
- Почему D-составляющая не устраняет статическую ошибку?
- Как интегральная составляющая ПИД-регулятора влияет на точность?
- Когда применима теорема о конечном значении?

Список использованной литературы

1. Бесекерский В. А., Попов Е. П. Теория систем автоматического регулирования. — СПб.: Профессия.

2. Ким Д. П. Теория автоматического управления. Линейные системы. — М.: Физматлит.

3. Кузовков Н. Т. Теория автоматического управления. — М.: Высшая школа.

4. Ogata K. Modern Control Engineering. — 5th ed. — Prentice Hall, 2010.

5. Dorf R. C., Bishop R. H. Modern Control Systems. — 13th ed. — Pearson, 2017.

6. Nise N. S. Control Systems Engineering. — 8th ed. — Wiley, 2019.