Законы булевой алгебры

Лекция 3

Лектор: Нұрғалиев М.К.

Цель и ожидаемые результаты

Что необходимо освоить перед выполнением лабораторной работы

Цель работы

Практически освоить основные законы булевой алгебры и методы упрощения логических функций.

Теоретический результат

Научиться определять тождественность логических функций с помощью таблиц истинности.

Практический результат

Освоить компьютерное моделирование и проектирование логических электронных схем

План лекции

Последовательность изучения материала

01	**Зачем упрощать логические выражения**	Сложность схемы, число операций и элементов
02	**Законы тождества булевой алгебры**	Переместительный, сочетательный, распределительный
03	**Законы инверсии и упрощения**	Де Моргана, повторения, двойного отрицания
04	**Склеивание, поглощение и константы**	Сокращение выражений с 0 и 1
05	**Проверка тождественности функций**	Таблицы истинности и сравнение результатов

1. Зачем упрощать логические выражения?

Практический смысл преобразований

Логические функции могут иметь громоздкую запись. Это усложняет построение таблиц истинности и проектирование электронных схем.

Меньше операций

Для получения того же результата требуется меньше логических действий.

Меньше элементов

Сокращается количество используемых логических элементов и соединений.

Эффективнее схема

Упрощение может уменьшить сложность, стоимость и задержки цифрового устройства.

Упрощение не меняет функцию: оно меняет форму её представления и реализации.

2. Переместительный закон

Порядок переменных не влияет на результат

Для конъюнкции

$A \cdot B = B \cdot A$

Для дизъюнкции

$A \vee B = B \vee A$

Пример: $1 \cdot 0 = 0 \cdot 1 = 0$

$1 \vee 0 = 0 \vee 1 = 1$

Сочетательный закон

Группировка переменных не меняет результат

Для конъюнкции

$(A \cdot B) \cdot C = A \cdot (B \cdot C)$

Для дизъюнкции

$(A \vee B) \vee C = A \vee (B \vee C)$

Закон позволяет менять расстановку скобок и выбирать удобную последовательность построения схемы.

Распределительный закон

Связь операций И и ИЛИ

Конъюнкция относительно дизъюнкции

$A \cdot (B \vee C) = (A \cdot B) \vee (A \cdot C)$

Дизъюнкция относительно конъюнкции

$A \vee (B \cdot C) = (A \vee B) \cdot (A \vee C)$

Распределительный закон позволяет раскрывать скобки или, наоборот, выносить общий множитель.

Закон инверсии — законы де Моргана

Инверсия суммы и произведения

Отрицание конъюнкции

$$\overline{(A \cdot B)} = \bar{A} \vee \bar{B}$$

Отрицание дизъюнкции

$$\overline{(A \vee B)} = \bar{A} \cdot \bar{B}$$

При инверсии выражения операция И заменяется на ИЛИ, а каждая переменная инвертируется. И наоборот.

Закон повторения

Повторение одной переменной не меняет её значения

Для конъюнкции

$A \cdot A = A$

Для дизъюнкции

$A \vee A = A$

Например: $A \cdot A \cdot A = A$; $A \vee A \vee A = A$.

Закон двойного отрицания

Две последовательные инверсии взаимно уничтожаются

$$\overline{\overline{A}} = A$$

Смысл закона

Если логическую переменную инвертировать два раза, исходное значение восстановится.

Закон склеивания

Исключение переменной из пары слагаемых или множителей

Для дизъюнктивной формы

$(A \vee B) \cdot (A \vee \overline{B}) = A$

Для конъюнктивной формы

$A \cdot B \vee A \cdot \overline{B} = A$

Переменная B принимает оба возможных значения в паре выражений, поэтому итог зависит только от A.

Законы поглощения

Избыточная часть выражения исключается

Поглощение в конъюнкции

$A \cdot (A \vee B) = A$

Поглощение в дизъюнкции

$A \vee (A \cdot B) = A$

Если A уже определяет результат, дополнительное условие с B не изменяет функцию.

Соотношения с логическими константами 0 и 1

Основные тождества для конъюнкции и дизъюнкции

Конъюнкция

$A \cdot 0 = 0$

$A \cdot 1 = A$

$A \cdot \overline{A} = 0$

Дизъюнкция

$A \vee 0 = A$

$A \vee 1 = 1$

$A \vee \overline{A} = 1$

Константы 0 и 1 могут существенно сокращать логические выражения.

3. Методика упрощения логической функции

Последовательность аналитического преобразования

1	**Исходная функция**	Переписать выражение без изменения скобок и инверсий.
2	**Найти структуру**	Выделить повторяющиеся переменные, общие множители и дополнения.
3	**Выбрать закон**	Применить подходящее тождество булевой алгебры.
4	**Преобразовать**	Выполнять преобразования последовательно, фиксируя каждый шаг.
5	**Проверить**	Сравнить таблицы истинности исходной и упрощённой функций.

Пример упрощения выражения

Применение закона поглощения

Исходное выражение:

$$F = A \vee (A \cdot B)$$

По закону поглощения:

$$A \vee (A \cdot B) = A$$

Сложное выражение заменено одной переменной. Функция при этом не изменилась.

4. Проверка тождественности таблицей истинности

Исходная и упрощённая функции должны совпадать

A	B	F=A∨(A·B)	Fупр=A
0	0	0	0
0	1	0	0
1	0	1	1
1	1	1	1

Совпадение выходных столбцов для всех наборов входов подтверждает тождественность функций.

Итоги лекции

Основные выводы

Тождества

Законы булевой алгебры позволяют преобразовывать логические выражения без изменения функции.

Упрощение

Сокращение операций и элементов может сделать электронную схему проще и экономичнее.

Проверка

Тождественность подтверждается совпадением таблиц истинности и результатов моделирования.

Результат лабораторной работы — две функционально эквивалентные схемы: исходная и упрощённая.

Контрольные вопросы

Законы булевой алгебры

- 1. Какие основные логические операции используются в булевой алгебре?
- 2. Для чего упрощают логические выражения?
- 3. Сформулируйте переместительный закон для И и ИЛИ.
- 4. В чём заключается сочетательный закон?
- 5. Запишите распределительный закон.
- 6. Сформулируйте оба закона де Моргана.
- 7. Что утверждает закон повторения?
- 8. В чём заключается закон двойного отрицания?
- 9. Что такое закон склеивания?
- 10. Сформулируйте законы поглощения.

Список литературы

Основной источник и дополнительная литература

- 1. Лабораторная работа № 3. «Упрощение логических выражений и функций с помощью законов тождества булевой алгебры». Учебно-методические материалы, предоставленные для занятия. Основной источник.
- 2. Mano M. M., Ciletti M. D. Digital Design. 6th ed. Pearson, 2018.
- 3. Tocci R. J., Widmer N. S., Moss G. L. Digital Systems: Principles and Applications. 12th ed. Pearson, 2017.
- 4. Floyd T. L. Digital Fundamentals. 11th ed. Pearson, 2015.
- 5. Harris D. M., Harris S. L. Digital Design and Computer Architecture. 2nd ed. Morgan Kaufmann, 2012.
- 6. National Instruments. Multisim Documentation and Getting Started Resources. Официальная документация программной среды.