КАЗАХСКИЙ НАЦИОНАЛЬНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ ИМ. АЛЬ-ФАРАБИ

Математическое моделирование двигателя постоянного тока

Управление угловым положением и исследование регуляторов

Теория линейных систем автоматического управления

Лекция 10 • Нұрғалиев М.К. • Алматы

Цель и план лекции

Цель

Получить модель двигателя по угловому положению и исследовать устойчивость и точность замкнутой системы.

Объект

Двигатель постоянного тока с независимым возбуждением.

Методы

Законы Кирхгофа и Ньютона, преобразование Лапласа, П/ПД/ПИД-регулирование.

14 ПУНКТОВ ПЛАНА — 14 ОТДЕЛЬНЫХ СОДЕРЖАТЕЛЬНЫХ СЛАЙДОВ

01 Введение в управление двигателями постоянного тока

02 Физическая модель двигателя постоянного тока

03 Математическая модель электрической части двигателя

04 Математическая модель механической части двигателя

05 Получение передаточной функции двигателя

06 Упрощение математической модели двигателя

07 Анализ динамических свойств объекта управления

08 Замкнутая система управления угловым положением

09 Теорема о конечном значении

10 Исследование системы с П-регулятором

11 Исследование системы с ПД-регулятором

12 Исследование системы с ПИД-регулятором

13 Сравнение регуляторов по устойчивости и точности регулирования

14 Анализ астатизма при различных задающих воздействиях

Введение в управление двигателями постоянного тока

Электромеханическое преобразование

Двигатель преобразует электрическую энергию в механическое вращение вала.

Области применения

Робототехника, станки с ЧПУ, технологические приводы и системы позиционирования.

Регулирование скорости

Поддержание заданной угловой скорости вращения вала.

Регулирование положения

Перемещение вала в заданную точку и удержание заданного угла.

$$u(t) \rightarrow \omega(t) \rightarrow \theta(t)$$

В лекции управляющее воздействие — напряжение якоря; регулируемая величина — угол вала

Физическая модель двигателя постоянного тока

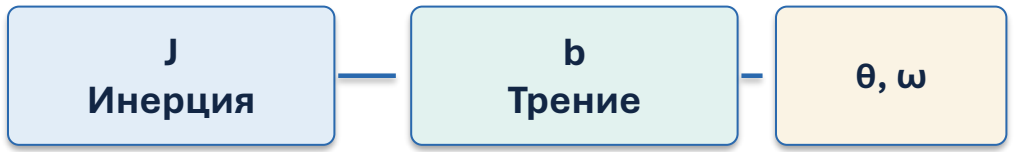
ВЗАИМОСВЯЗЬ ЭЛЕКТРИЧЕСКОЙ И МЕХАНИЧЕСКОЙ ЧАСТЕЙ

ЭЛЕКТРИЧЕСКАЯ ЧАСТЬ



Напряжение → ток якоря → электромагнитный момент

МЕХАНИЧЕСКАЯ ЧАСТЬ



$$E_{\text{a}} = K_{\text{e}}\omega$$

Противо-ЭДС противодействует приложенному напряжению

$$M_{\text{e}} = K_{\text{t}} i_{\text{a}}$$

Электромагнитный момент пропорционален току якоря

Связь процессов

Скорость вращения определяет противо-ЭДС, а ток якоря определяет создаваемый двигателем момент.

Математическая модель электрической части двигателя

$$u_{\mathrm{a}}(t) = Ri_{\mathrm{a}}(t) + L\frac{di_{\mathrm{a}}}{dt} + E_{\mathrm{a}}(t)$$

Второй закон Кирхгофа для цепи якоря

$$E_{\mathrm{a}}(t) = K_{\mathrm{e}}\omega(t) = K_{\mathrm{e}}\dot{\theta}(t)$$

Противо-ЭДС пропорциональна угловой скорости

$$\omega(t) = \frac{d\theta(t)}{dt}$$

Угловая скорость — производная положения

$$u_{\mathrm{a}} = Ri_{\mathrm{a}} + L \cdot \frac{di_{\mathrm{a}}}{dt} + K_{\mathrm{e}}\dot{\theta}(t)$$

Итоговое уравнение электрической части

$$U_{\mathrm{a}}(s) = (Ls + R)I_{\mathrm{a}}(s) + K_{\mathrm{e}}s\Theta(s)$$

Операторная форма при нулевых начальных условиях

Физическая интерпретация

Напряжение якоря расходуется на падения напряжения в сопротивлении и индуктивности, а также на компенсацию противо-ЭДС.

Математическая модель механической части двигателя

$$M_{\text{e}}(t) - M\text{тр}(t) = J \cdot \frac{d\omega}{dt}$$

Второй закон Ньютона для вращательного движения

$$M_{\text{e}}(t) = K_{\text{t}} i_{\text{a}}(t)$$

Электромагнитный момент

$$M\text{тр}(t) = b\omega(t)$$

Момент вязкого трения

$$J\dot{\omega} + b\omega = K_{\text{t}} i_{\text{a}}$$

Уравнение механической части

$$(Js + b)\Omega(s) = K_{\text{t}} I_{\text{a}}(s)$$

Операторная форма

Обозначения

J — приведённый момент инерции; b — коэффициент вязкого трения; ω — угловая скорость; K_t — коэффициент электромагнитного момента.

Получение передаточной функции двигателя

$$U_{\mathrm{a}}(s) = (Ls + R)I_{\mathrm{a}}(s) + K_{\mathrm{e}}s\Theta(s)$$

Электрическое уравнение

$$(Js^2 + bs)\Theta(s) = K_{\mathrm{t}}I_{\mathrm{a}}(s)$$

Механическое уравнение, ω=sΘ

$$I_{\mathrm{a}}(s) = s(Js + b)\Theta(s)/K_{\mathrm{t}}$$

Выражаем ток через положение

$$W\theta u(s) = \frac{\Theta(s)}{U_{\mathrm{a}}(s)} = \frac{K_{\mathrm{t}}}{s((Ls + R)(Js + b) + K_{\mathrm{t}}K_{\mathrm{e}})}$$

Передаточная функция по угловому положению с учётом индуктивности якоря

Ключевой результат

Множитель 1/s отражает интегрирующее свойство: угловое положение является интегралом угловой скорости.

Упрощение математической модели двигателя

$$T_e = \frac{L}{R}$$

Электрическая постоянная времени

$$T_e \ll T_м$$

Условие пренебрежения индуктивностью

$$L \approx 0 \Rightarrow U_a = RI_a + K_e s\Theta$$

Упрощённое электрическое уравнение

$$W(s) = \frac{K_t}{s(RJs + Rb + K_t K_e)}$$

Упрощённая передаточная функция

$$W(s) = \frac{K}{s(s + a)}$$

Стандартная форма для дальнейшего исследования регуляторов

$$K = \frac{K_t}{RJ}$$

Коэффициент передачи модели

$$a = \frac{Rb + K_t K_e}{RJ}$$

Параметр апериодической части

Анализ динамических свойств объекта управления

$$W(s) = \frac{K}{s(s+a)}$$

Упрощённая модель двигателя по угловому положению

$$s(s+a)=0$$

Характеристическое уравнение

$$s_1=0;\ s_2=-a$$

Один полюс в нуле, второй — слева

Интегрирующее свойство

Угол является интегралом скорости. При постоянной скорости угол продолжает изменяться.

Устойчивость объекта

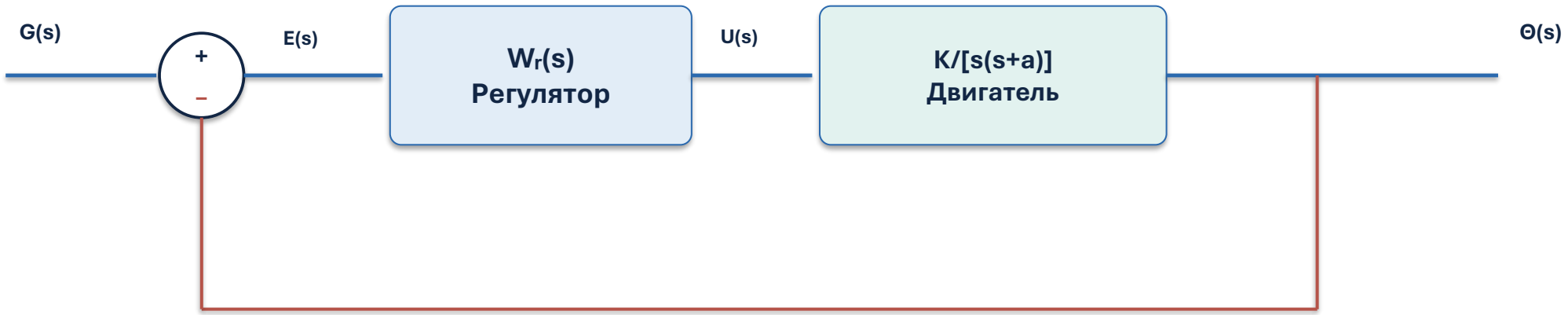
Объект по угловому положению не является асимптотически устойчивым из-за полюса в начале координат.

Необходима замкнутая система с обратной связью

Регулятор должен обеспечить удержание заданного угла

Замкнутая система управления угловым положением

ЕДИНИЧНАЯ ОТРИЦАТЕЛЬНАЯ ОБРАТНАЯ СВЯЗЬ



$$W_{зам} = \frac{W_r W_0}{1 + W_r W_0}$$

Передаточная функция замкнутой системы

$$W_e = \frac{1}{1 + W_r W_0}$$

Передаточная функция по ошибке

Теорема о конечном значении

$$e_\infty = \lim_{t\to\infty} e(t) = \lim_{s\to 0} sE(s)$$

Позволяет найти установившуюся ошибку непосредственно по изображению Лапласа

Условие применимости

Все полюса sE(s) должны находиться в открытой левой полуплоскости после устранения сокращаемых особенностей.

Обязательная проверка

Сначала исследуют устойчивость замкнутой системы. Нельзя применять теорему формально при мнимых или правых полюсах.

$$G_{step}(s) = g_0/s$$

Постоянное задание угла

$$G_{ramp}(s) = v_0/s^2$$

Линейно возрастающее задание угла

Постоянное задание соответствует позиционированию; линейно возрастающее — слежению за движением с заданной скоростью.

Исследование системы с П-регулятором

$$W_r(s)=K_p$$

П-регулятор

$$W\text{раз} = K_\text{p}\frac{K}{[s(s+a)]}$$

Разомкнутая система

$$s^2 + as + K_\text{p} = 0$$

Характеристическое уравнение

$$\omega_\text{n} = \sqrt{KK_\text{p}};\ \ \xi = \frac{a}{2\sqrt{KK_\text{p}}}$$

Параметры стандартной системы второго порядка

Устойчивость

При a>0, K>0 и K_p>0 оба корня имеют отрицательные действительные части.

Влияние K_p

Рост K_p повышает собственную частоту, но уменьшает относительное демпфирование — отклик может стать более колебательным.

$$e\infty = 0\ \ (\text{ступень});\quad e_\infty = \frac{v_0 a}{KK_\text{p}}\ (\text{линейный рост})$$

Нулевая ошибка позиционирования, конечная ошибка слежения

Исследование системы с ПД-регулятором

$$W_{\text{ПД}}(s) = K_{\text{p}} + K_d s$$

ПД-регулятор

$$D(s) = s^2 + (a + KKd)s + KKp$$

Характеристический полином

$$\omega_{\text{n}} = \sqrt{KK_{\text{p}}}$$

Собственная частота

$$\xi = \frac{a + KKd}{2\sqrt{KK_{\text{p}}}}$$

Коэффициент демпфирования

Влияние дифференциальной части

При фиксированном K_p увеличение Kd повышает демпфирование и уменьшает колебательность.

Практическое ограничение

Слишком большое Kd может замедлить систему; идеальное дифференцирование усиливает шум, поэтому используют фильтр.

$$e=0 \ \text{(ступень)}; \quad e=v_0 a/(KK_p) \ \text{(линейный рост)}$$

ПД улучшает переходный процесс, но не повышает порядок астатизма

Сравнение регуляторов по устойчивости и точности регулирования

Регулятор	Характеристический полином	Ступенчатое задание	Линейно растущее задание
П	$s^2+as+KK_p$	$e=0$	$e=v_0a/(KK_p)$
ПД	$s^2+(a+KKd)s+KK_p$	$e=0$	$e=v_0a/(KK_p)$
ПИД	$s^3+(a+KKd)s^2+KK_ps+KK_i$	$e=0$	$e=0$

П-регулятор

Достаточен для удержания постоянного угла; сохраняет ошибку слежения.

ПД-регулятор

Улучшает демпфирование; точность слежения по рампе не улучшается.

ПИД-регулятор

Интегральная составляющая обеспечивает нулевую ошибку по рампе при устойчивости.

Вывод: регулятор выбирают по совокупности требований к устойчивости, динамике и точности.

Анализ астатизма системы при различных задающих воздействиях

$$W_{раз}(s)=W_r(s)W_0(s)$$

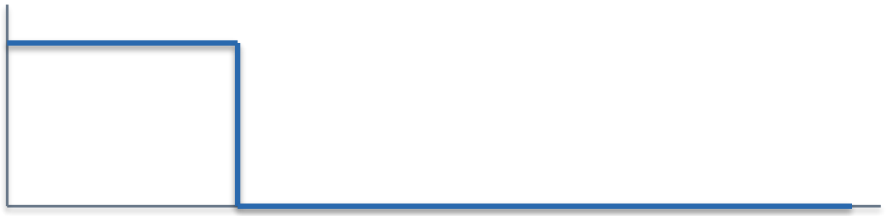
Порядок астатизма определяется числом интеграторов (полюсов в нуле) разомкнутой системы

П- и ПД-регуляторы

Wраз содержит один интегратор: система астатическая первого порядка. Ступень отслеживается без ошибки; рампа — с конечной ошибкой.

ПИД-регулятор

Интегральная часть добавляет ещё один интегратор: порядок астатизма становится равным двум; ошибка по рампе равна нулю.



Ступенчатое задание: $g(t)=g_0 \cdot 1(t)$



Рамповое задание: $g(t)=v_0 t \cdot 1(t)$

П/ПД: тип 1 • ПИД: тип 2

Для рассматриваемой модели двигателя по угловому положению

Основные выводы

Модель двигателя строится из электрического уравнения якоря и уравнения вращательного движения.

Передаточная функция по угловому положению содержит интегратор, поскольку угол является интегралом скорости.

Пренебрежение индуктивностью якоря допустимо, если электрическая постоянная времени существенно меньше механической.

П- и ПД-регуляторы обеспечивают нулевую установившуюся ошибку при постоянном задании, но имеют конечную ошибку при линейно растущем задании.

ПД-составляющая повышает демпфирование и позволяет корректировать переходный процесс, но не повышает порядок астатизма.

ПИД-регулятор добавляет интегратор и при устойчивой настройке обеспечивает нулевую ошибку также для линейно растущего задания.

Контрольные вопросы

Какие физические процессы описывают электрическая и механическая модели двигателя?

Как определяется электромагнитный момент двигателя?

При каких условиях можно пренебречь индуктивностью якоря?

Как формируется передаточная функция замкнутой системы?

Как K_p влияет на собственную частоту и демпфирование?

Почему П- и ПД-регуляторы обеспечивают нулевую ошибку при постоянном задании?

Что называется астатизмом системы автоматического управления?

Почему для устранения ошибки по рамповому заданию вводят интегральную составляющую?

Что такое противо-ЭДС и как она зависит от угловой скорости?

Как получить передаточную функцию двигателя по угловому положению?

Почему передаточная функция двигателя по положению содержит интегратор?

Как П-регулятор влияет на устойчивость двигателя?

Как дифференциальная составляющая изменяет динамические характеристики?

Почему при линейно возрастающем задании возникает ненулевая ошибка?

Как определить порядок астатизма по передаточной функции разомкнутой системы?

Список использованной литературы

1. Бесекерский В. А., Попов Е. П. Теория систем автоматического управления. — СПб.: Профессия.

2. Ким Д. П. Теория автоматического управления. Линейные системы. — М.: Физматлит.

3. Кузовков Н. Т. Теория автоматического управления. — М.: Высшая школа.

4. Ogata K. Modern Control Engineering. — 5th ed. — Prentice Hall, 2010.

5. Dorf R. C., Bishop R. H. Modern Control Systems. — 13th ed. — Pearson, 2017.

6. Nise N. S. Control Systems Engineering. — 8th ed. — Wiley, 2019.