СОСТАВЛЕНИЕ ЛОГИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ ПО СДНФ И СКНФ

Лекция 4

Лектор: Нұрғалиев М.К.

Цель и ожидаемые результаты

Что необходимо освоить перед выполнением лабораторной работы

Цель работы

Научиться составлять логические функции по таблице истинности в совершенной дизъюнктивной и конъюнктивной нормальных формах.

Теоретические знания

Различать ДНФ, СДНФ, КНФ и СКНФ; понимать правила построения элементарных конъюнкций и дизъюнкций.

Практические навыки

Упрощать полученные функции и проверять её таблицей истинности.

Ключевая идея: одна и та же булева функция может быть представлена разными выражениями, но её таблица истинности остаётся неизменной.

План лекции

Логика изучения темы

01	**Основные логические операции**	Конъюнкция, дизъюнкция и отрицание
02	**Нормальные формы**	ДНФ, СДНФ, КНФ и СКНФ
03	**Построение СДНФ**	Выбор строк таблицы, где функция равна 1
04	**Построение СКНФ**	Выбор строк таблицы, где функция равна 0
05	**Пример преобразования**	Построение СДНФ и СКНФ для одной функции

1. Дизъюнктивная нормальная форма (ДНФ)

Дизъюнкция простых конъюнкций

ДНФ — логическое выражение, представляющее собой дизъюнкцию (ИЛИ) нескольких простых конъюнкций (И).

$$F = (\neg a \cdot b) \vee (a \cdot c) \vee (b \cdot \neg c)$$

Важно

В обычной ДНФ не обязательно, чтобы каждая конъюнкция содержала все переменные функции.

Совершенная ДНФ (СДНФ)

Каждая конъюнкция содержит все переменные

СДНФ — дизъюнкция элементарных конъюнкций, в каждой из которых присутствуют все переменные функции: либо в прямой, либо в инверсной форме.

Пример элементарной конъюнкции

Для набора a=0, b=1, c=0:

¬a · b · ¬c

Правило

Каждая строка таблицы, где y=1, порождает одну конъюнкцию. Все такие конъюнкции объединяются через ИЛИ.

2. Конъюнктивная нормальная форма (КНФ)

Конъюнкция простых дизъюнкций

КНФ — логическое выражение, представляющее собой конъюнкцию (И) нескольких простых дизъюнкций (ИЛИ).

$$F = (a \vee b) \cdot (\overline{a} \vee c) \cdot (b \vee \overline{c})$$

Важно

В обычной КНФ не обязательно, чтобы каждая дизъюнкция содержала все переменные функции.

Совершенная КНФ (СКНФ)

Каждая дизъюнкция содержит все переменные

СКНФ — конъюнкция простых дизъюнкций, каждая из которых включает все переменные функции в прямой или инверсной форме.

Пример элементарной дизъюнкции

Для набора a=0, b=1, c=0:

$a \vee \bar{b} \vee c$

Правило

Каждая строка таблицы, где y=0, порождает одну дизъюнкцию. Все такие дизъюнкции объединяются через И.

СДНФ и СКНФ: сравнение

Два канонических представления одной функции

СДНФ

- Выбираются строки, где y=1
- Формируются конъюнкции
- Конъюнкции объединяются через ИЛИ

СКНФ

- Выбираются строки, где y=0
- Формируются дизъюнкции
- Дизъюнкции объединяются через И

СДНФ строится по единичным строкам, СКНФ — по нулевым строкам таблицы истинности.

4. Правило построения СДНФ

Как из строки таблицы получить конъюнкцию

Значение переменной	Литерал в конъюнкции
0	Переменная с отрицанием: $\bar{a}$
1	Переменная без отрицания: a

Например, строка (a,b,c)=(0,1,0) даёт минтерм $\bar{a} \cdot b \cdot \bar{c}$.

Правило построения СКНФ

Как из строки таблицы получить дизъюнкцию

Значение переменной	Литерал в дизъюнкции
0	Переменная без отрицания: a
1	Переменная с отрицанием: ¬a

Например, строка (a,b,c)=(0,1,0) даёт макстерм ($a \vee \bar{b} \vee c$).

Алгоритм построения СДНФ

Последовательность действий

1. **Записать таблицу** — Определить все наборы входных переменных и выход y.
2. **Выбрать строки** — Оставить только строки, в которых y=1.
3. **Составить минтермы** — Для 0 записать переменную с отрицанием, для 1 — без отрицания.
4. **Объединить** — Соединить все минтермы операцией ИЛИ.

Алгоритм построения СКНФ

Последовательность действий

1. **Записать таблицу** — Определить все наборы входных переменных и выход y.
2. **Выбрать строки** — Оставить только строки, в которых y=0.
3. **Составить макстермы** — Для 0 записать переменную без отрицания, для 1 — с отрицанием.
4. **Объединить** — Соединить все макстермы операцией И.

5. Пример: исходная таблица истинности

Для иллюстрации используем первую функцию варианта 1 из таблицы № 1

a	b	c	y
0	0	0	0
0	0	1	1
0	1	0	0
0	1	1	1
1	0	0	1
1	0	1	0
1	1	0	1
1	1	1	0

Единичные наборы: 001, 011, 100, 110.

Нулевые наборы: 000, 010, 101, 111.

Построение СДНФ для примера

Берём строки, где y = 1

001 -> $\bar{a} \cdot \bar{b} \cdot c$

011 -> $\bar{a} \cdot b \cdot c$

100 -> $a \cdot \bar{b} \cdot \bar{c}$

110 -> $a \cdot b \cdot \bar{c}$

Итоговая СДНФ

$F = (\bar{a} \cdot \bar{b} \cdot c) \vee \bar{a} \cdot b \cdot c) \vee (a \cdot \bar{b} \cdot \bar{c}) \vee (a \cdot b \cdot \bar{c})$

Каждая конъюнкция содержит все три переменные.

Построение СКНФ для примера

Берём строки, где y = 0

000 → (a ∨ b ∨ c)
010 → (a ∨ $\bar{b}$ ∨ c)
101 → ($\bar{a}$ ∨ b ∨ $\bar{c}$)
111 → ($\bar{a}$ ∨ $\bar{b}$ ∨ $\bar{c}$)

Итоговая СКНФ

F = (a∨b∨c) · (a ∨ $\bar{b}$ ∨ c) ·($\bar{a}$ ∨ b ∨ $\bar{c}$) · ($\bar{a}$ ∨ $\bar{b}$ ∨ $\bar{c}$)

Каждая дизъюнкция содержит все три переменные.

Проверка примера

Исходная функция и упрощённая функция

a	b	c	Исходная F	a ⊕ c
0	0	0	0	0
0	0	1	1	1
0	1	0	0	0
0	1	1	1	1
1	0	0	1	1
1	0	1	0	0
1	1	0	1	1
1	1	1	0	0

Совпадение выходных столбцов подтверждает эквивалентность исходного и упрощённого выражений.

Итоги лекции

Основные выводы

СДНФ

Строится по строкам таблицы, где функция равна 1; объединяет полные конъюнкции.

СКНФ

Строится по строкам таблицы, где функция равна 0; объединяет полные дизъюнкции.

Проверка

Эквивалентность подтверждается совпадением таблиц истинности и моделированием.

СДНФ и СКНФ дают каноническое представление булевой функции по её таблице истинности.

Контрольные вопросы

Основные понятия и нормальные формы

- 1. Какие три основные логические операции используются для задания булевых функций?
- 2. Как определяется конъюнкция n переменных?
- 3. Как определяется дизъюнкция n переменных?
- 4. Что называется простой конъюнкцией?
- 5. Что называется простой дизъюнкцией?
- 6. Дайте определение ДНФ.
- 7. Чем СДНФ отличается от обычной ДНФ?
- 8. Дайте определение КНФ.
- 9. Чем СКНФ отличается от обычной КНФ?
- 10. Почему в СДНФ и СКНФ каждая элементарная часть содержит все переменные?

Список литературы

Основной источник и дополнительная литература

- 1. Лабораторная работа № 4. «Составить логическую функцию используя СДНФ и СКНФ». Учебно-методические материалы, предоставленные для занятия. Основной источник.
- 2. Mano M. M., Ciletti M. D. Digital Design. 6th ed. Pearson, 2018.
- 3. Tocci R. J., Widmer N. S., Moss G. L. Digital Systems: Principles and Applications. 12th ed. Pearson, 2017.
- 4. Floyd T. L. Digital Fundamentals. 11th ed. Pearson, 2015.
- 5. Harris D. M., Harris S. L. Digital Design and Computer Architecture. 2nd ed. Morgan Kaufmann, 2012.
- 6. National Instruments. Multisim Documentation and Getting Started Resources. Официальная документация программной среды.