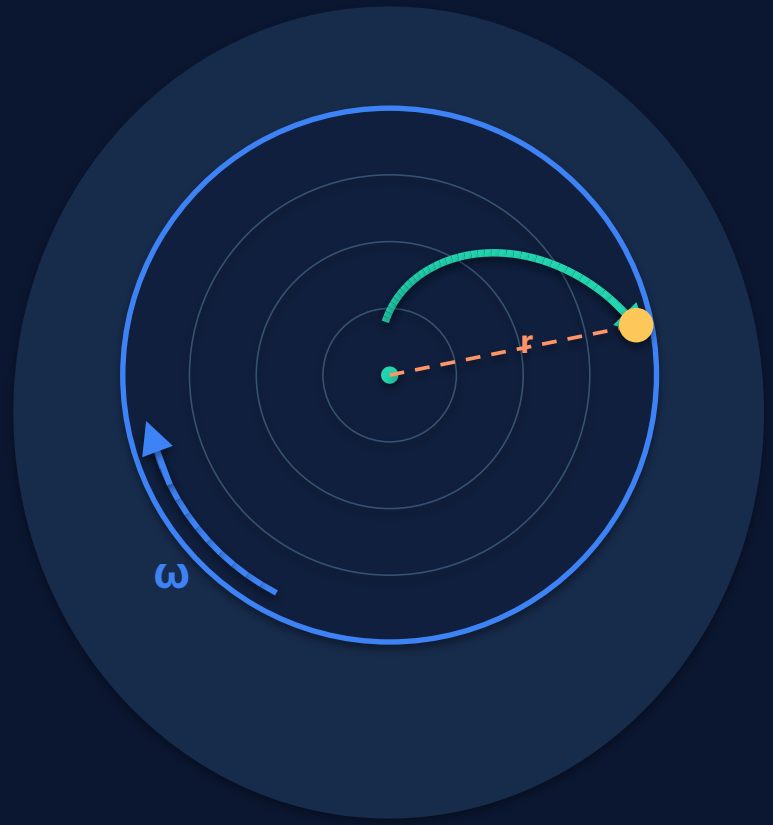
КУРС • 10 ЛЕКЦИЙ

ОПТИМИЗАЦИЯ ТЕХНОЛОГИЧЕСКИХ ПРОЦЕССОВ

ЛЕКЦИЯ 04

Моделирование механических процессов



МОДЕЛЬ ДВИЖЕНИЯ ЧАСТИЦЫ

Зачем моделировать механические процессы?

Для проектирования, прогнозирования и оптимизации операций с твёрдыми материалами.

01 ИЗМЕЛЬЧЕНИЕ

Размер частиц, энергия, износ

02 ТРАНСПОРТИРОВАНИЕ

Скорость, расход, устойчивость

03 СОРТИРОВКА

Траектории и разделение фракций

04 СМЕШЕНИЕ

Однородность и время обработки

ЗАДАЧА МОДЕЛИ

Связать воздействующие силы и кинематику частиц с параметрами аппарата.

Геометрия + режим + свойства материала

→ траектория → производительность

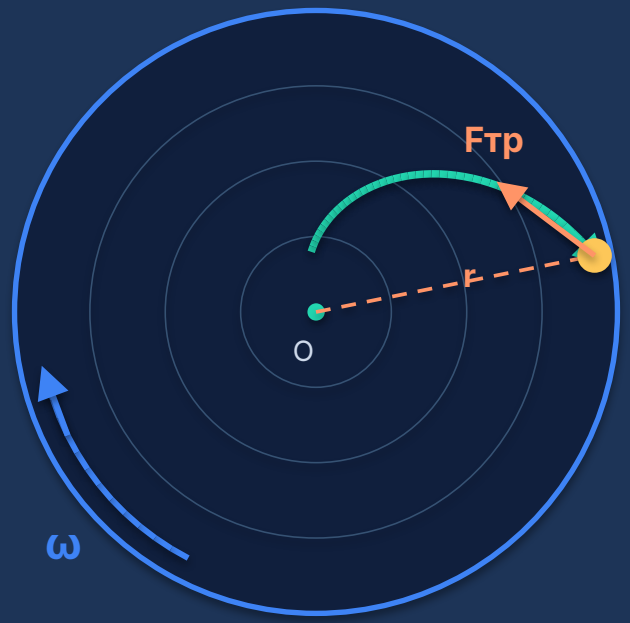
Исходный пример лекции: движение отдельной твёрдой частицы по горизонтальному вращающемуся диску.

РАСЧЁТНАЯ СХЕМА

Частица на вращающемся диске

Упрощение до прямолинейного движения может искажать реальную криволинейную траекторию.

КРИВОЛИНЕЙНОЕ ДВИЖЕНИЕ



Условная схема, не результаты расчёта

ИСХОДНЫЕ ПАРАМЕТРЫ

ω	угловая скорость диска
r, φ	положение частицы
f	коэффициент трения
m	масса частицы

Цель: определить скорости, траекторию и угол схода β.

Силы, действующие на частицу

Исходная модель рассматривает плоское скольжение по горизонтальному диску.

УРАВНЕНИЯ СИЛ

$$G = mg \quad ; \quad N = mg$$

$$F_{тр} = fN = fmg$$

m — масса; g — ускорение свободного падения; f — коэффициент трения.

ПРИНЯТЫЕ ДОПУЩЕНИЯ

ГОРИЗОНТАЛЬНАЯ ПЛОСКОСТЬ

Тяжесть и нормальная реакция взаимно уравновешены

СКОЛЬЖЕНИЕ

Трение направлено против относительного движения

МАТЕРИАЛЬНАЯ ТОЧКА

Размер и собственное вращение частицы не учитываются

В плоскости диска: $m \cdot a = \Sigma F_{плоск.}$

Переносное и относительное движение

Положение частицы задаётся радиусом r и углом φ в полярной системе координат.

ГЕОМЕТРИЯ СКОРОСТЕЙ



Схема сложения составляющих скорости

СОСТАВЛЯЮЩИЕ

$v_r = dr/dt$
радиальная скорость

$v\varphi = r \cdot d\varphi/dt$
окружная скорость частицы

$v_д = \omega r$
скорость точки диска

Абсолютная и относительная скорости не совпадают.

Четыре составляющие ускорения

Абсолютное ускорение включает переносные, относительную и кориолисову части.

$$a = a_e^n + a_e\tau + a_r + a_c$$

ПЕРЕНОСНОЕ НОРМАЛЬНОЕ

$$a_e^n = r \cdot (d\varphi/dt)^2$$

Направлено к центру вращения

ПЕРЕНОСНОЕ КАСАТЕЛЬНОЕ

$$a_e\tau = r \cdot d^2\varphi/dt^2$$

Изменение угловой скорости

ОТНОСИТЕЛЬНОЕ

$$a_r = d^2r/dt^2$$

Изменение радиальной скорости

КОРИОЛИСОВО

$$a_c = 2 \cdot (d\varphi/dt) \cdot (dr/dt)$$

Связь радиального движения и вращения

Проекции сил и направление трения

Модель движущейся частицы формируется по двум координатным направлениям.

УРАВНЕНИЯ В ПРОЕКЦИЯХ

$$m \cdot (\ddot{r} - r\dot{\varphi}^2) = -F_{тр} \cos \gamma$$

$$m \cdot (r\ddot{\varphi} + 2\dot{r}\dot{\varphi}) = F_{тр} \sin \gamma$$

γ — угол между вектором силы трения и радиальным направлением.

ОТНОСИТЕЛЬНОЕ ДВИЖЕНИЕ

$$v_{отн} = v_д - v$$

Трение противоположно относительной скорости скольжения.

$$v_д = \omega \cdot r$$

Система дифференциальных уравнений

После подстановки проекций трения задача сводится к совместному расчёту r(t) и φ(t).

ОБЩИЙ ЗНАМЕНАТЕЛЬ — МОДУЛЬ ОТНОСИТЕЛЬНОЙ СКОРОСТИ

$$V_{отн} = \sqrt{[(\omega r - r\dot{\varphi})^2 + \dot{r}^2]}$$

$$\ddot{r} = r\dot{\varphi}^2 - f\,g \cdot \dot{r} / V_{отн}$$

$$\ddot{\varphi} = [f\,g \cdot (\omega r - r\dot{\varphi})/V_{отн} - 2\dot{r}\dot{\varphi}] / r$$

Для численного расчёта задают r(0), φ(0), ṙ(0), φ̇(0), f, ω и радиус диска.

Что даёт численное решение?

Искомые результаты: траектория, радиальная и окружная скорости, направление схода частицы.

01

ПАРАМЕТРЫ

ω, f, R

→

02

НАЧАЛЬНЫЕ УСЛОВИЯ

r_o, φ_o, скорости

→

03

ЧИСЛЕННОЕ РЕШЕНИЕ

Интегрирование ОДУ

→

04

РЕЗУЛЬТАТ

r(t), φ(t), β

ПОЛНАЯ СКОРОСТЬ

$$v = \sqrt{(v_r^2 + v\varphi^2)}$$

$v_r = \dot{r}$ • $v\varphi = r\dot{\varphi}$

УГОЛ ОТРЫВА ОТ ДИСКА

$$\cos \beta = v\varphi / v$$

Подбор ω, f и геометрии позволяет менять характер схода.

От механики — к инженерной оптимизации

Математическая модель связывает физические законы, режим аппарата и технологический результат.

ГЛАВНЫЕ ВЫВОДЫ

ФИЗИКА

Движение определяют силы и кинематика

МОДЕЛЬ

Используются связанные уравнения для r и φ

РАСЧЁТ

ОДУ решают численно с начальными условиями

ОПТИМИЗАЦИЯ

Изменяют параметры для нужной траектории

ВОПРОСЫ ДЛЯ САМОПРОВЕРКИ

1. Почему реальная траектория частицы криволинейна?
2. Какие составляющие образуют абсолютное ускорение?
3. Как связаны направление трения и относительная скорость?
4. Какие параметры нужны для расчёта угла схода β?

Источник: лекция 4 «Моделирование механических процессов».