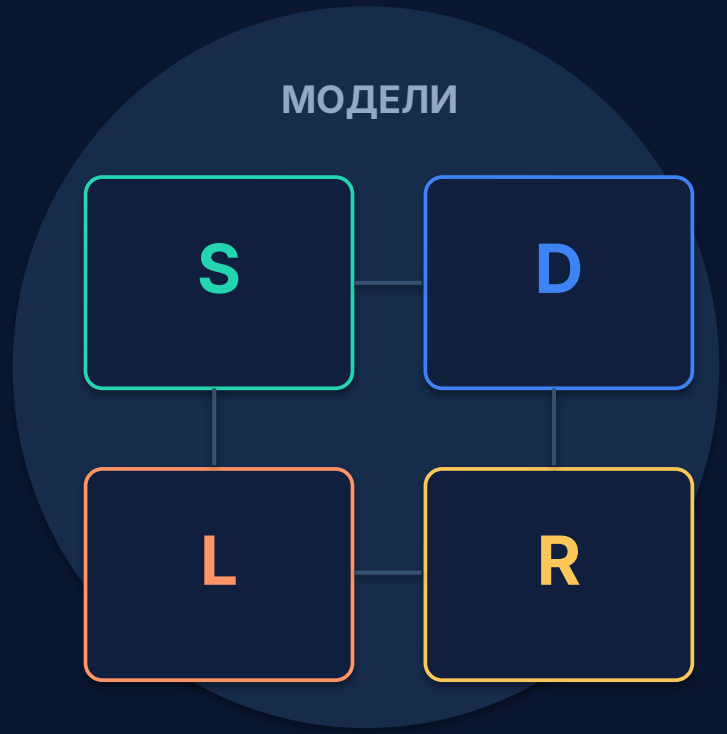
КУРС • 10 ЛЕКЦИЙ

ОПТИМИЗАЦИЯ ТЕХНОЛОГИЧЕСКИХ ПРОЦЕССОВ

ЛЕКЦИЯ 02

Виды математических моделей и этапы их разработки



ВРЕМЯ × ПРОСТРАНСТВО

Классификация • математическое описание • алгоритм • адекватность

Что такое математическая модель?

Приближённое описание процесса на языке математических символов.

МАТЕМАТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ

Уравнения и соотношения, описывающие существенные связи между параметрами технологического процесса.

ПРИЗНАК 1 — ВРЕМЯ

- **Статические — параметры не зависят от t**
- **Динамические — параметры меняются с t**

ПРИЗНАК 2 — ПРОСТРАНСТВО

- **Сосредоточенные — одно значение в объёме**
- **Распределённые — параметры зависят от x, y, z**

Признаки независимы: одна модель может быть динамической и одновременно распределённой.

ПО ВРЕМЕНИ

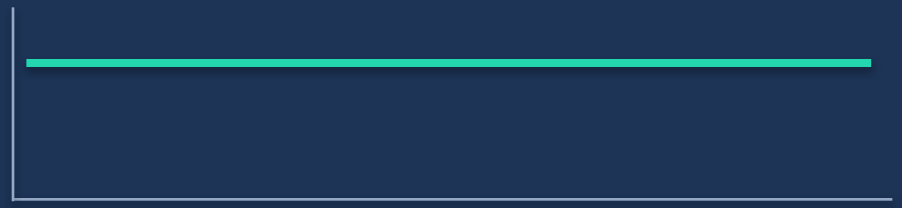
Статическая и динамическая модели

Один и тот же аппарат описывается по-разному в установившемся и переходном режиме.

СТАТИЧЕСКАЯ

Параметры не меняются во времени.

$$Q \cdot (C_{вх} - C) = 0$$

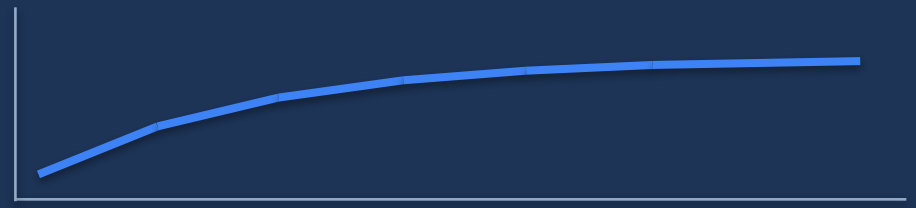


C(t) = const

ДИНАМИЧЕСКАЯ

Параметры меняются во времени.

$$V \cdot dC/dt = Q \cdot (C_{вх} - C)$$



C(t) → Cуст

Иллюстративные уравнения материального баланса аппарата идеального смешения, V = const.

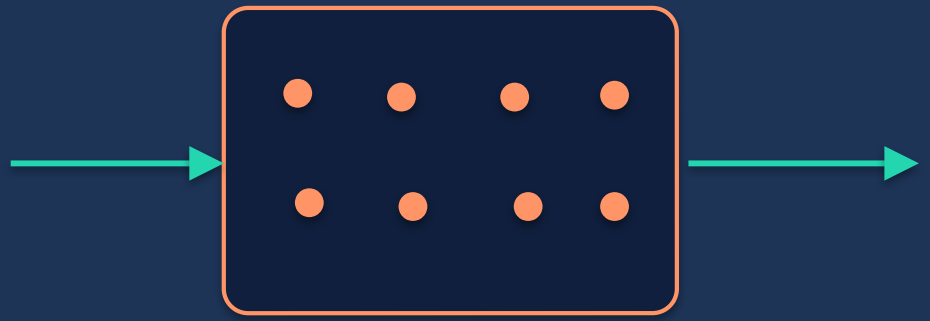
ПО ПРОСТРАНСТВУ

Сосредоточенные и распределённые параметры

Ключевой вопрос: различаются ли значения переменной в разных точках аппарата?

СОСРЕДОТОЧЕННАЯ

Полное перемешивание: концентрация одинакова во всём объёме.



$C = C(t)$

РАСПРЕДЕЛЁННАЯ

В проточном аппарате концентрация меняется вдоль координаты x.



$C(x,t)$

Иллюстрации аппарата полного смешения и проточного аппарата; реальные профили определяются физикой процесса.

СИСТЕМАТИЗАЦИЯ

Два признака дают четыре комбинации

Временные и пространственные свойства моделей удобно анализировать независимо.

	НЕИЗМЕННО В ПРОСТРАНСТВЕ	ИЗМЕНЯЕТСЯ В ПРОСТРАНСТВЕ
СТАЦИОНАРНАЯ	**Статическая, сосредоточенная** Алгебраические уравнения **C = const**	**Статическая, распределённая** ОДУ по пространству / алгебра **C = C(x)**
НЕСТАЦИОНАРНАЯ	**Динамическая, сосредоточенная** ОДУ по времени **C = C(t)**	**Динамическая, распределённая** Уравнения в частных производных **C = C(x,t)**

ОДУ — обыкновенные дифференциальные уравнения. Конкретный вид зависит от выбранного процесса.

ПО НАЗНАЧЕНИЮ

Три направления использования математических моделей

В лекции выделены расчётные, оптимизационные и кибернетические модели.

РАСЧЁТНЫЕ

Рассчитать параметры и связи между ними.

Δp, k_m = f(скорость газа)

ПРАКТИЧЕСКОЕ ПРИМЕНЕНИЕ

ОПТИМИЗАЦИОННЫЕ

Выбрать наилучшее решение по заданному критерию.

max η / min энергозатрат

ПРАКТИЧЕСКОЕ ПРИМЕНЕНИЕ

КИБЕРНЕТИЧЕСКИЕ

Описать управление, входы, выходы и обратную связь.

вход → объект → выход

ПРАКТИЧЕСКОЕ ПРИМЕНЕНИЕ

Пример зависимости гидравлического сопротивления и массообмена от скорости газа приведён в исходной лекции.

ЭТАП 01

Постановка задачи и физическое моделирование

Определить цель, границы объекта, значимые факторы и критерии.

РЕАЛЬНЫЙ АППАРАТ



Описать состав, взаимодействия и режимы работы.

ЭЛЕМЕНТАРНЫЕ ПРОЦЕССЫ

ДВИЖЕНИЕ ПОТОКОВ

Гидродинамика, перенос вещества

ТЕПЛООБМЕН

Передача энергии между средами

РЕАКЦИИ

Химические превращения компонентов

Физическая схема предшествует системе уравнений.

ЭТАП 02

Математическое описание и допущения

Каждому существенному физическому процессу сопоставляется математическое уравнение.

КАРКАС МОДЕЛИ

1. Основные уравнения

Балансы массы, энергии, движения

2. Уравнения связи

Свойства среды и взаимосвязи процессов

3. Условия задачи

Начальные и граничные условия

Описание должно учитывать ключевые факторы, но оставаться решаемым.

КАК ПОЛУЧАЮТ УРАВНЕНИЯ?

АНАЛИТИЧЕСКИ

На основе физических законов

ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНО

Из измеренных зависимостей

КОМБИНИРОВАННО

Законы + экспериментальные коэффициенты

Алгоритм, проверка адекватности и обратная связь

Схема адаптирована из рисунка 1 исходной лекции.



Адекватность устанавливают по соответствию расчётных и экспериментальных результатов на оригинале.

Как выбрать и разработать подходящую модель?

Цель — достаточная точность при приемлемой сложности математического описания.

ПРОВЕРОЧНЫЙ ЛИСТ

- **ВРЕМЯ**
  Статическая или динамическая?
- **ПРОСТРАНСТВО**
  Сосредоточенная или распределённая?
- **НАЗНАЧЕНИЕ**
  Расчёт, оптимизация или управление?
- **КАЧЕСТВО**
  Проверена адекватность оригиналу?

ВОПРОСЫ ДЛЯ ОБСУЖДЕНИЯ

1. Чем отличаются статическая и динамическая модели?
2. В чём смысл сосредоточенных параметров?
3. Какие уравнения описывают распределённые модели?
4. Какие четыре этапа включает разработка модели?
5. Как проверить адекватность математического описания?

Вывод: математическую модель выбирают по характеру изменений процесса, цели исследования и требуемой точности.