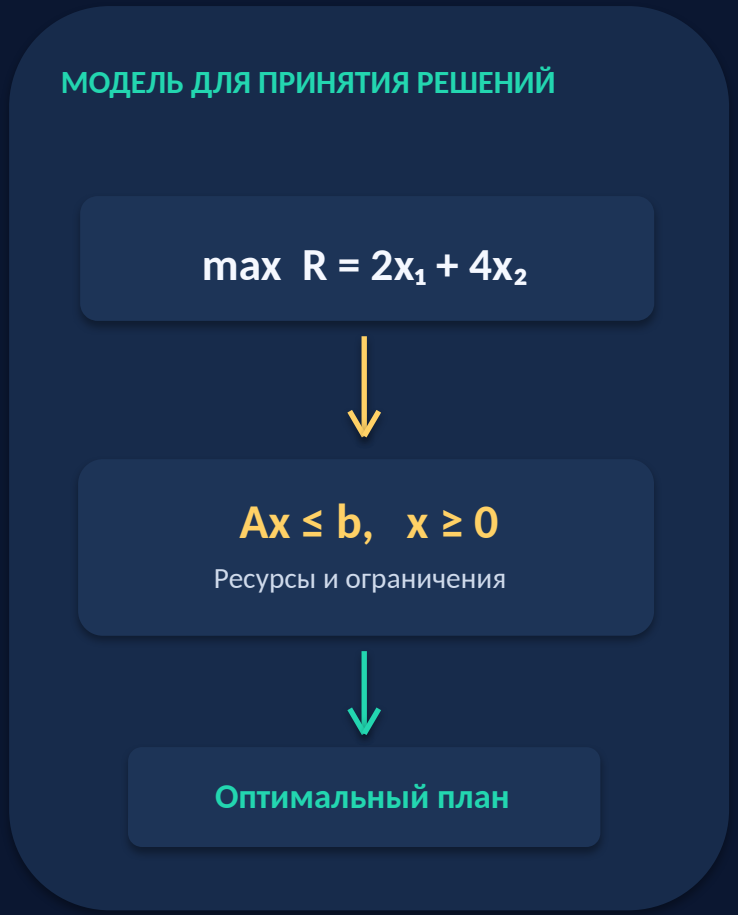
КУРС • 10 ЛЕКЦИЙ

ОПТИМИЗАЦИЯ ТЕХНОЛОГИЧЕСКИХ ПРОЦЕССОВ

ЛЕКЦИЯ 08

Постановка задачи линейного программирования



Целевая функция • Ограничения • Допустимая область • Планирование эксперимента

Когда применяют линейное программирование

Линейная цель и линейные ограничения позволяют выбрать лучший вариант при ограниченных ресурсах.

Структура LP-задачи

Переменные

Управляемые объёмы и решения

$x_1, x_2, \ldots, x_n$

Целевая функция

Прибыль, затраты или выпуск

$\max / \min \ c^T x$

Ограничения

Материалы, время, бюджет

$Ax \le b$

Что делает линейная модель полезной

01 Быстрый поиск оптимального плана выпуска продукции

02 Распределение дефицитных ресурсов между операциями

03 Оптимизация перевозок, запасов и производственных смен

Нелинейную модель иногда локально линеаризуют.

Математическая запись задачи

Сначала определяем вектор переменных; затем записываем критерий и допустимую область.

Каноническая учебная формулировка

$$\max \; R(x) = c_1x_1 + \ldots + c_nx_n$$

$$a_{i1}x_1 + \ldots + a_{in}x_n \le b_i$$

для каждого ограничения $i = 1,\ldots,m$

$$x_j \ge 0, \quad j = 1,\ldots,n$$

Что означают символы

x_j	планируемые величины
c_j	эффект одной единицы
a_{ij}	расход ресурса i
b_i	доступный объём ресурса

Возможны также равенства и ≥-ограничения.

Завод: два вида пластмассовых изделий

Необходимо распределить полиэтилен и рабочее время так, чтобы недельная прибыль была максимальной.

Исходные данные

ПОКАЗАТЕЛЬ	ИЗДЕЛИЕ А	ИЗДЕЛИЕ Б	РЕСУРС
Полиэтилен, кг/шт.	3	4	1 700 кг
Время, мин/шт.	12	30	160 ч
Прибыль, тыс. руб./шт.	2	4	макс.

Решение: x_1 — количество изделий А; x_2 — количество изделий Б.

Оптимизационная задача

$$\max \; R = 2x_1 + 4x_2$$

$$3x_1 + 4x_2 \le 1\,700$$

$$2x_1 + 5x_2 \le 1\,600$$

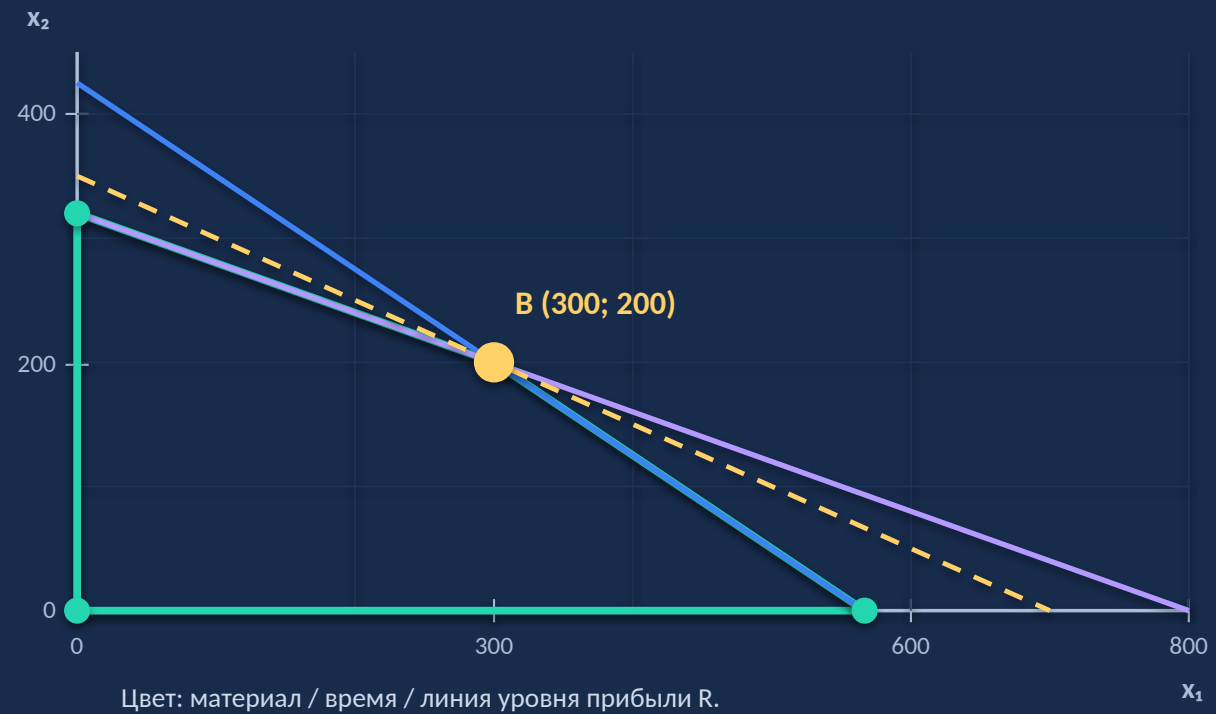
$$x_1,\ x_2 \ge 0$$

Время приведено к масштабу минут и разделено на 6: исходно $12x_1 + 30x_2 \le 9\,600$.

Допустимая область и линии прибыли

При двух переменных ограничения задают многоугольник; лучшая вершина находится по сдвигу линии уровня R.

Ограничения пересекаются в точке B



Цвет: материал / время / линия уровня прибыли R.

Оптимальная вершина

$x_1 = 300;\ x_2 = 200$

Пересечение двух границ

$R_{max} = 1\ 400$ тыс. руб.

В общем случае максимум линейной цели на ограниченном многоугольнике достигается в одной из его вершин.

Ресурсы используются без превышения

План из 300 изделий А и 200 изделий Б одновременно достигает пределов по сырью и времени.

Проверяем исходные ограничения

Полиэтилен	3 · 300 + 4 · 200	**1 700 кг**
Рабочее время	12 · 300 + 30 · 200	**9 600 мин = 160 ч**
Прибыль	2 · 300 + 4 · 200	**1 400 тыс. руб.**

Смысл найденного оптимума

01 Допустимое решение: оба ресурса в пределах лимитов

02 Оптимальное решение: среди допустимых планов прибыль максимальна

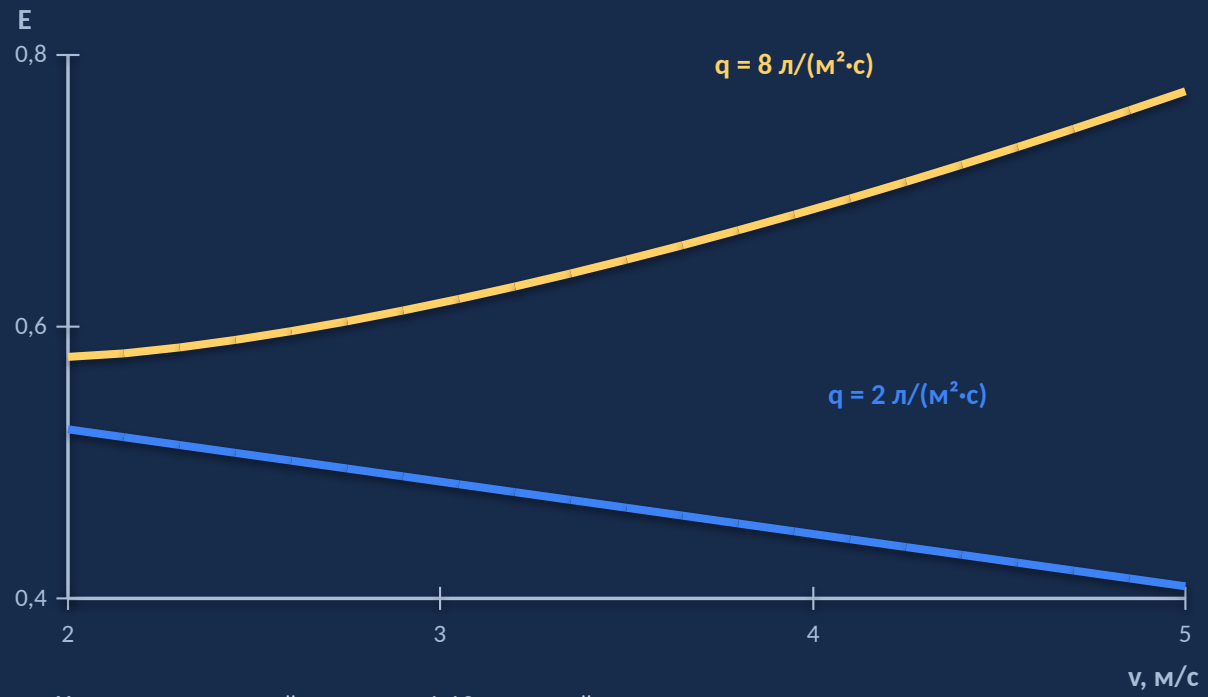
03 Метод расширяется на десятки и тысячи переменных

Далее в исходной лекции: планирование эксперимента.

Экспериментальная оптимизация массопередачи

Если строгую физическую модель трудно получить, изучают отклик процесса при изменении факторов.

Зависимости E = f(v) при двух плотностях орошения



Характер тенденций — по рис. 1.12 исходной лекции.

Факторы и отклик

v — скорость газа

2…5 м/с

q — плотность орошения

2…8 л/(м²·с)

E — эффективность

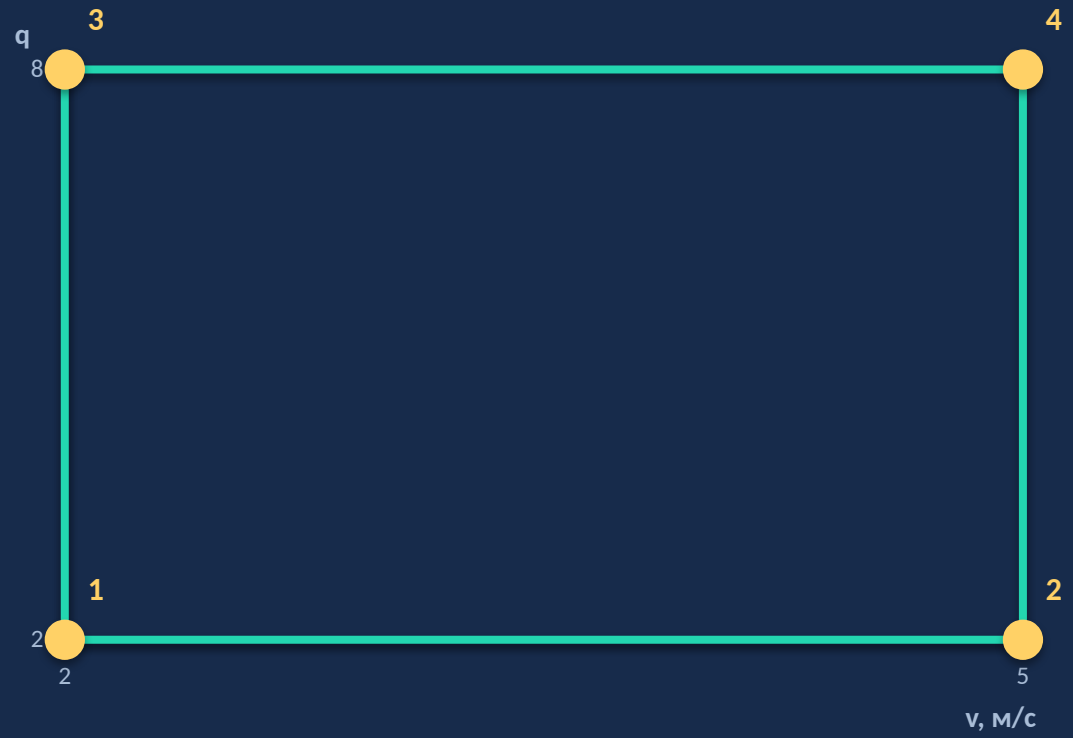
результат опыта

Важно: DOE — не линейное программирование.

Четыре опыта вместо случайного перебора

Для двух факторов, каждый на двух уровнях, план охватывает все четыре комбинации.

Факторное пространство: v × q



Правило полного плана

$$N = l^k = 2^2 = 4$$

l — число уровней фактора;
k — число независимых факторов.

Каждый угол прямоугольника — отдельный эксперимент.

Натуральные и кодированные уровни факторов

Кодирование переводит реальные диапазоны в безразмерные значения −1 и +1.

Нулевой уровень и шаг

$v_0 = (2 + 5)/2 = 3{,}5$ м/с

$\Delta v = (5 - 2)/2 = 1{,}5$ м/с

$q_0 = (2 + 8)/2 = 5$ л/(м²·с)

$\Delta q = (8 - 2)/2 = 3$ л/(м²·с)

$$x_i = (z_i - z_{i0})/\Delta z_i$$

Матрица 2^2

№	v, м/с	q, л/(м²·с)	x_1	x_2
1	2	2	−1	−1
2	5	2	+1	−1
3	2	8	−1	+1
4	5	8	+1	+1

Обозначения кодов приведены по правилу «нижний = −1, верхний = +1»; в исходной матрице есть несоответствия знаков.

Как правильно поставить задачу оптимизации?

Сначала выбираем метод по структуре данных: аналитические линейные связи или экспериментальный отклик.

Два подхода из лекции

Линейное программирование

Линейная цель + ограничения → допустимый оптимальный план.

Планирование эксперимента

Несколько факторов → организованные опыты → модель отклика.

Точность постановки определяет смысл найденного оптимума.

Контрольные вопросы

1. Что отличает LP от нелинейной задачи?
2. Что такое допустимая область?
3. Почему оптимум найден в вершине B?
4. Как рассчитать N для плана 2^2?
5. Для чего кодируют факторы?

Следующая тема: другие методы оптимизации.