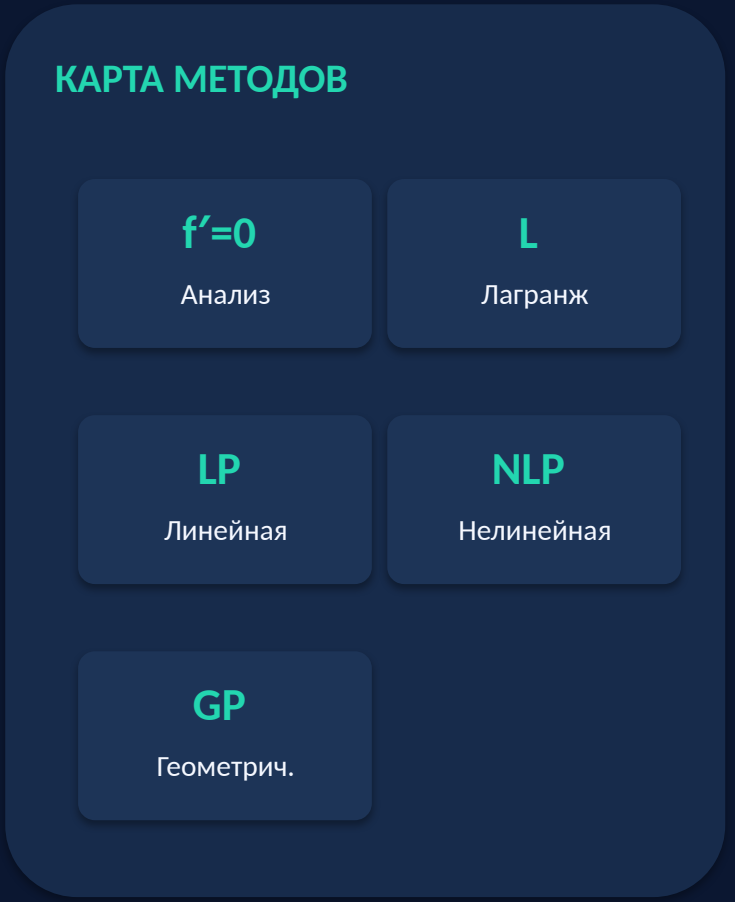
КУРС • 10 ЛЕКЦИЙ

ОПТИМИЗАЦИЯ ТЕХНОЛОГИЧЕСКИХ ПРОЦЕССОВ

ЛЕКЦИЯ 07

Характеристика методов решения задач оптимизации



КЛАССИФИКАЦИЯ

Пять подходов к поиску оптимума

Выбор алгоритма определяется формой целевой функции, видом ограничений и сложностью модели.

01

Классический анализ

Гладкая функция; поиск стационарных точек

$f'(x) = 0$

02

Множители Лагранжа

Гладкая цель + ограничения-равенства

$\nabla f = \lambda \nabla g$

03

Линейное программирование

Линейные цель и ограничения

$\max c^T x$

04

Нелинейное программирование

Нелинейная цель и/или ограничения

$\min f(x)$

05

Геометрическое программирование

Специальные позиномиальные формы

$\sum c_i \prod x_j^{a_{ij}}$

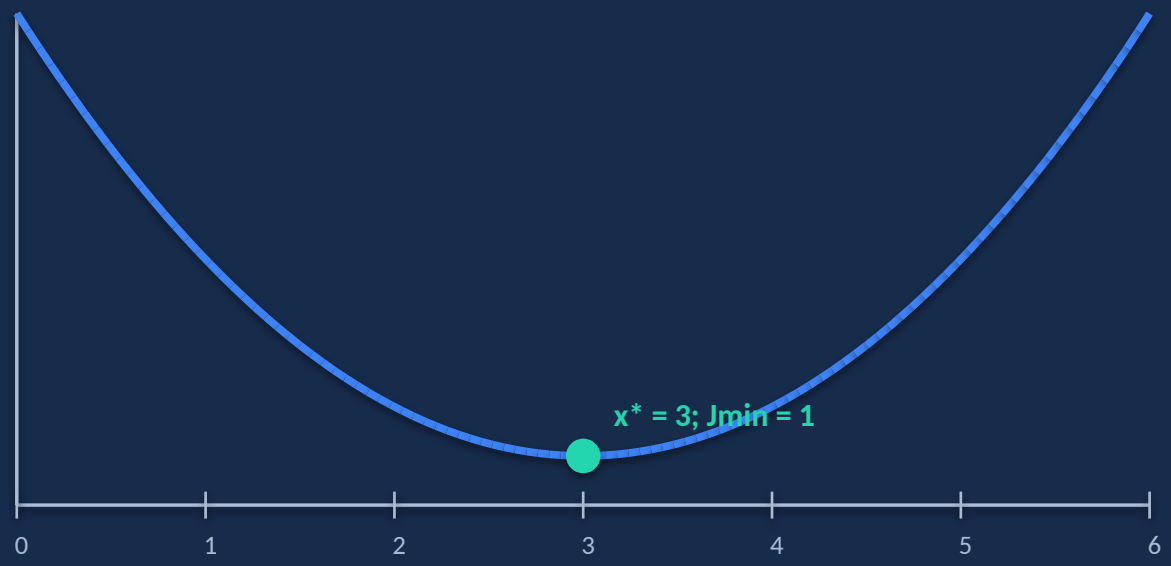
Общий принцип: модель → допустимая область → метод поиска → проверка оптимальности

Классический анализ: экстремум функции

Применяется, когда целевая функция известна аналитически и производные доступны.

Учебный пример: минимизация затрат

$$J(x) = (x - 3)^2 + 1$$



Алгоритм

1. Производная

$J'(x) = 2(x - 3)$

2. Необходимое условие

$J'(x^*) = 0 \rightarrow x^* = 3$

3. Проверка

$J''(x) = 2 > 0 \rightarrow$ минимум

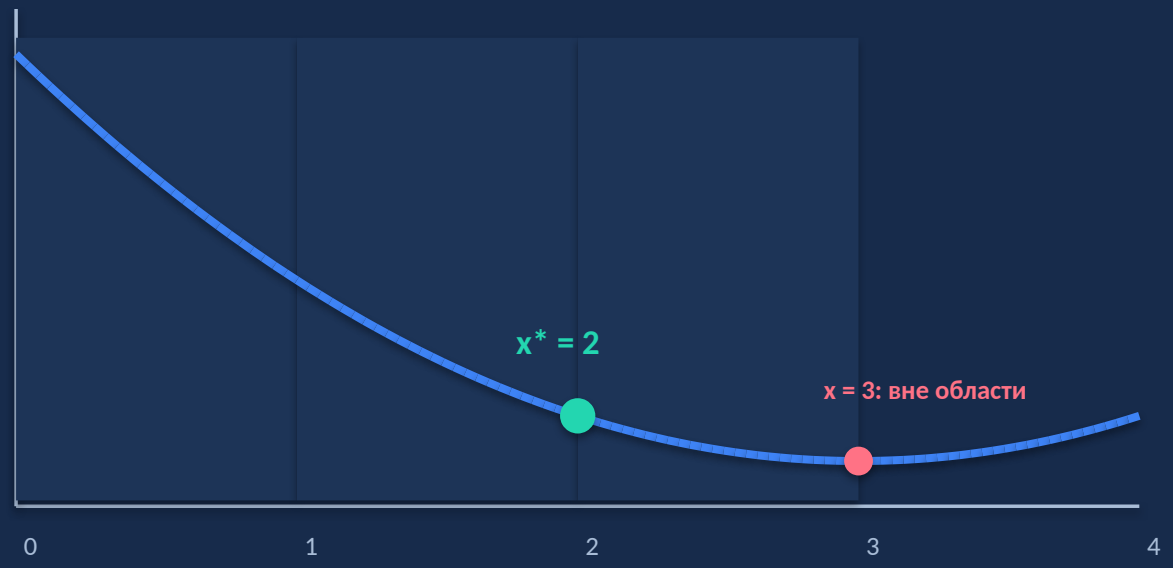
Точки $J'=0$ проверяют дополнительно.

Почему нельзя забывать про ограничения

Стационарная точка может лежать вне допустимой области; оптимум тогда находится на границе.

Минимум функции на отрезке x ∈ [0; 2]

$$J(x) = (x - 3)^2 + 1$$



Проверяем три группы точек

01 Внутренние точки

Уравнения первых производных

02 Границы области

Активные ограничения

03 Сравнение значений

Минимум среди допустимых

При нескольких параметрах анализ границ становится сложнее.

Метод неопределённых множителей Лагранжа

Используется, когда нужно найти экстремум гладкой функции при выполнении равенств.

Математическая постановка

$$\max \; J(x, y) = xy$$

при $x + y = 10$, $x, y \geq 0$

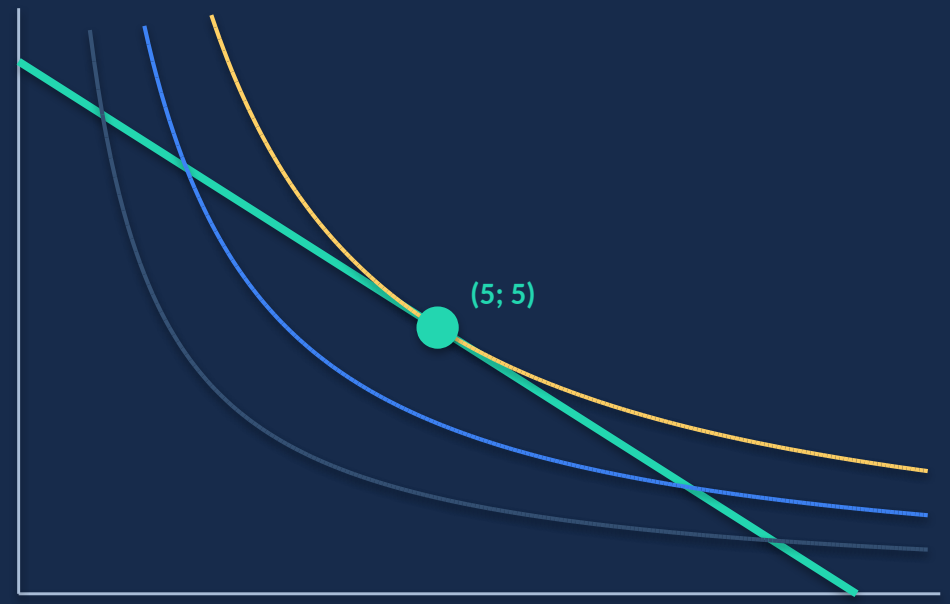
$$L = xy + \lambda(10 - x - y)$$

$$\partial L/\partial x = y - \lambda = 0$$

$$\partial L/\partial y = x - \lambda = 0$$

$$x^* = y^* = 5 \;\rightarrow\; J_{max} = 25$$

Линия ограничения и контуры функции

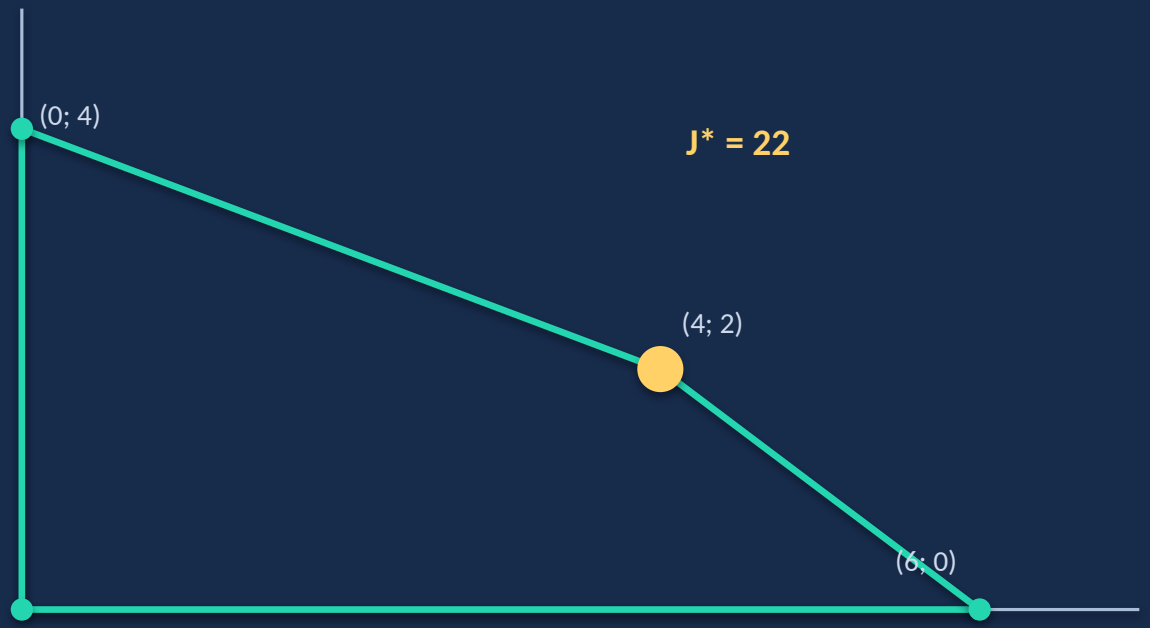


Касание изолинии и ограничения

Линейное программирование: план выпуска

Применяют, когда целевая функция и все ограничения линейны.

Допустимая область и оптимальная вершина



Производственная задача

max J = 3x + 5y

x + y ≤ 6
x + 2y ≤ 8
x, y ≥ 0

Оптимальное решение

x* = 4; y* = 2

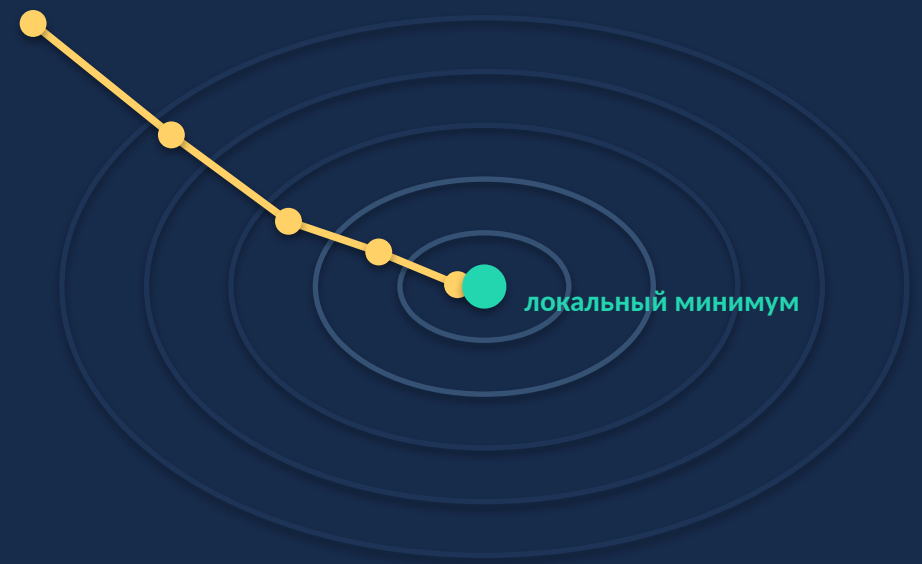
J* = 3 · 4 + 5 · 2 = 22

Иллюстративный пример для обучения.

Нелинейное программирование

Решает задачи с нелинейной целью и/или ограничениями: инженерные модели, процессы переноса, режимы.

Траектория поиска в нелинейном ландшафте



Численный алгоритм уточняет параметры по результатам расчётов J(x).

Три семейства подходов

Градиентные

Используют ∇J; чувствительны к начальной точке

Безградиентные

Используют оценки J без производных

Методы случайного поиска

Исследуют различные области пространства

Скорость и точность зависят от постановки.

Геометрическое программирование

Подходит для целевых функций и ограничений позиномиального вида при положительных переменных.

Позитивная сумма степенных членов

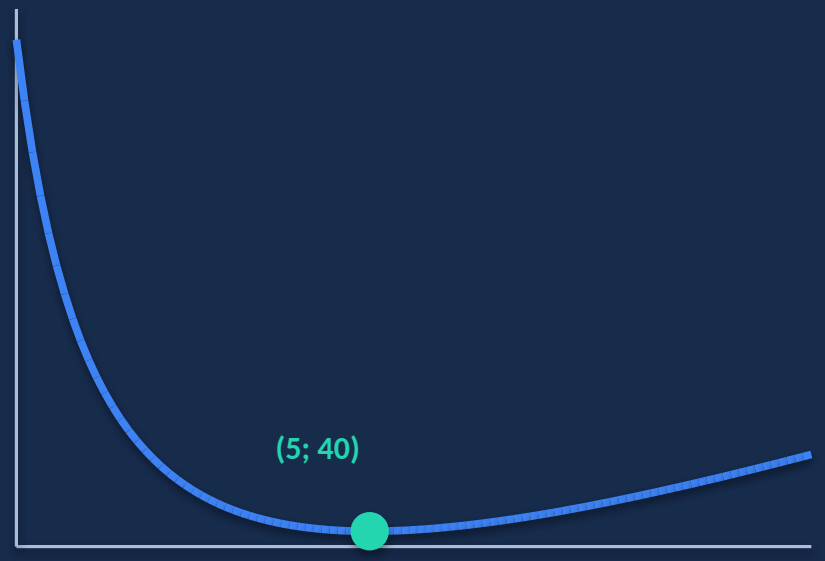
$$J(x) = 4x + 100/x, \quad x > 0$$

Позином: сумма выражений $c_i \prod x_j^{a_{ij}}$, где $c_i > 0$.

$$J'(x) = 4 - 100/x^2 = 0$$

$$x^* = 5 \quad \rightarrow \quad J_{min} = 40$$

Форма критерия и минимум



Пример иллюстративный; коэффициенты условны.

Точность, скорость и область применения

Не существует универсально лучшего метода: свойства модели определяют затраты и качество решения.

МЕТОД	КЛАСС ЗАДАЧ	СИЛЬНАЯ СТОРОНА	ОГРАНИЧЕНИЕ
Классический	Гладкая, простая	Прозрачные условия	Границы; проверка экстремума
Лагранж	Ограничения-равенства	Аналитическое включение связей	Рост числа неизвестных
Линейное (LP)	Линейные функции	Отработанные численные алгоритмы	Линейная аппроксимация
Нелинейное (NLP)	Нелинейные модели	Гибкость формулировки	Локальные экстремумы; вычисления
Геометрич. (GP)	Позиномиальная форма	Специальная структура задачи	Ограниченный класс моделей

Точность и скорость зависят от размерности, обусловленности, ограничений, алгоритма и вычислительных ресурсов.

Как выбрать метод для своей задачи?

Начинайте с математической структуры модели и допустимой области, а не с названия алгоритма.

Короткий алгоритм выбора

01	Цель и ограничения линейны?	LP
02	Есть гладкие равенства?	Лагранж
03	Задача позиномиальная?	GP
04	Гладкая и без ограничений?	Классический анализ
05	Другая нелинейная структура?	NLP

Контрольные вопросы

1. Почему $J' = 0$ не гарантирует глобальный минимум?
2. Для каких ограничений применяют метод Лагранжа?
3. Чем LP отличается от NLP?
4. Что такое позином и где применяют GP?
5. От чего зависят точность и скорость поиска?

ИСТОЧНИК: МАТЕРИАЛ ЛЕКЦИИ 7 «ХАРАКТЕРИСТИКА МЕТОДОВ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ ОПТИМИЗАЦИИ»