КУРС • 10 ЛЕКЦИЙ

ОПТИМИЗАЦИЯ ТЕХНОЛОГИЧЕСКИХ ПРОЦЕССОВ

ЛЕКЦИЯ 09

Экспериментально-статистическая оптимизация

Факторы • уровни • регрессия • оптимум

ПЛАНИРОВАНИЕ ОПЫТОВ

$$N = 2^k$$



Зачем нужна статистическая оптимизация?

Когда процесс сложен, а полной физической модели нет, оптимум ищут по организованным опытам.

01 ИССЛЕДОВАТЬ

Изменять технологические параметры по заранее выбранному плану, а не случайным перебором.

02 ОЦЕНИТЬ

Количественно определить влияние факторов и их взаимодействий на критерий качества.

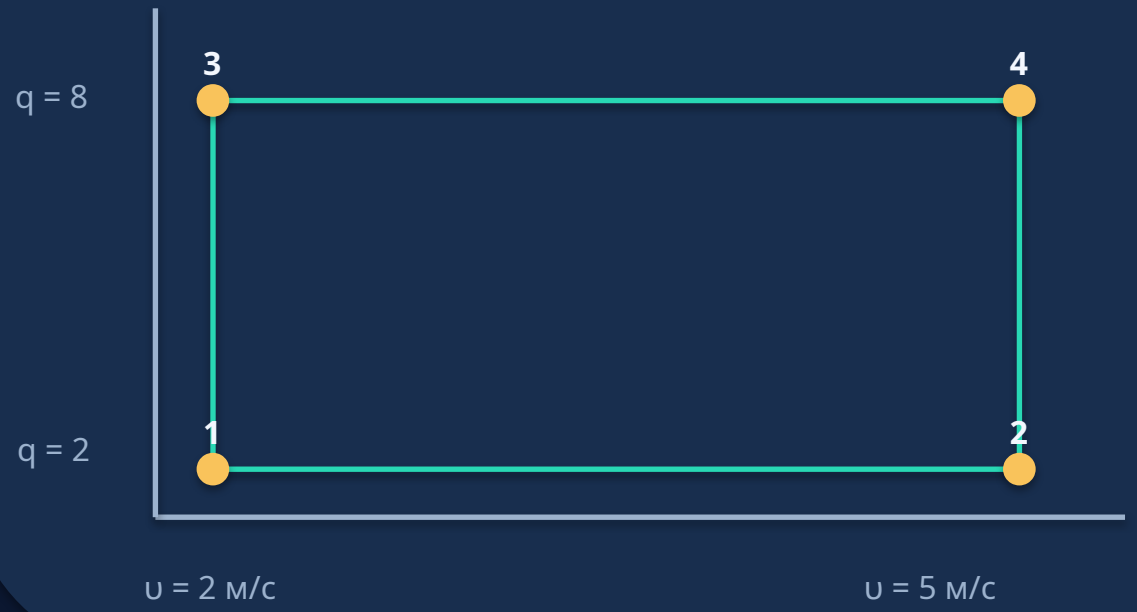
03 ОПТИМИЗИРОВАТЬ

Построить статистическую модель и выбрать условия, улучшающие целевую функцию.

Истоки: Р. Фишер — факторное планирование; Дж. Бокс и К. Уилсон — последовательный поиск оптимума (1951).

Факторы и область исследования

Пример из лекции: эффективность десорбции CO_2 зависит от скорости газа υ и плотности орошения q.



ФАКТОР x_1

Скорость газа υ: от 2 до 5 м/с

ФАКТОР x_2

Плотность орошения q: от 2 до 8 л/(м²·с)

Кодирование факторов: от единиц измерения к ±1

Нулевой уровень — середина диапазона, интервал варьирования — половина диапазона.

$$x_i = (z_i - z_{0i}) / \Delta z_i$$

Скорость газа	$z_0 = (2 + 5)/2 = 3{,}5$ м/с
	$\Delta z = (5 - 2)/2 = 1{,}5$ м/с
Орошение	$z_0 = 5;\ \Delta z = 3$ л/(м²·с)

КОДИРОВАННЫЕ УРОВНИ

−1	нижний уровень
0	центр плана
+1	верхний уровень

Полный факторный эксперимент 2^2: четыре опыта

Два фактора на двух уровнях дают все четыре комбинации условий.

ОПЫТ	x_1	x_2	y = E
1	-1	-1	y1
2	+1	-1	y2
3	-1	+1	y3
4	+1	+1	y4

ЧТО ПОЛУЧАЕМ

Матрица фиксирует все сочетания уровней.

После опытов в столбец y заносят измеренную эффективность E.

Числа y_1…y_4 зависят от эксперимента.

Регрессионная модель: вклад каждого фактора

Кодированные уровни позволяют найти коэффициенты модели по результатам опытов.

$$\hat{y} = b_0 + b_1 x_1 + b_2 x_2$$

СВОБОДНЫЙ ЧЛЕН

$b_0 = (y_1 + y_2 + y_3 + y_4)/4$

ЭФФЕКТ x_1

$b_1 = (-y_1 + y_2 - y_3 + y_4)/4$

ЭФФЕКТ x_2

$b_2 = (-y_1 - y_2 + y_3 + y_4)/4$

Коэффициенты показывают изменение отклика при варьировании факторов в выбранной области.

Взаимодействие факторов: эффект x_1x_2

Влияние скорости газа может зависеть от плотности орошения — простая сумма эффектов этого не учитывает.

$$\hat{y} = b_0 + b_1x_1 + b_2x_2 + b_{12}x_1x_2$$

Столбец взаимодействия

$(-1) \times (-1) = +1$

$(+1) \times (-1) = -1$

$(-1) \times (+1) = -1$

$(+1) \times (+1) = +1$

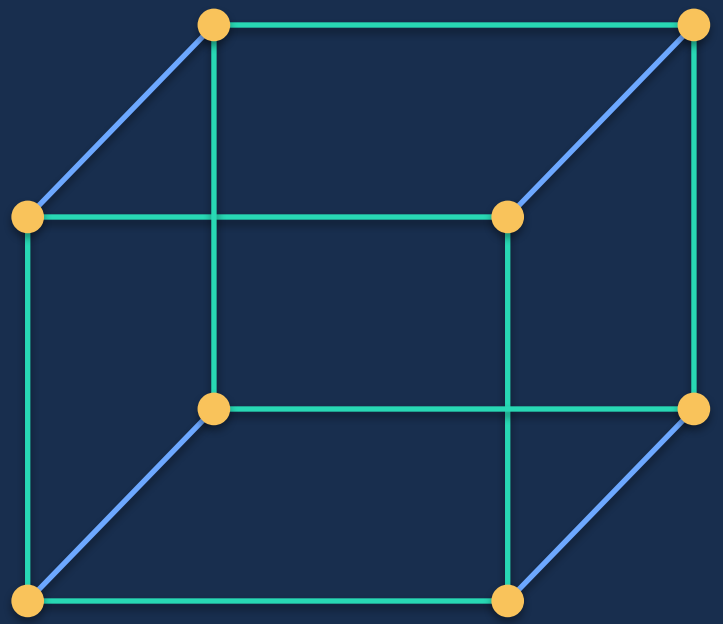
КОЭФФИЦИЕНТ

$b_{12} = (y_1 - y_2 - y_3 + y_4)/4$

Ненулевой эффект указывает на совместное влияние факторов.

От плана 2^2 к плану 2^3: восемь опытов

Третий фактор расширяет квадрат до куба; все вершины соответствуют комбинациям уровней ±1.



8 вершин = 8 комбинаций

$$N = 2^3 = 8$$

Знаки в столбцах:

x_1 : − + − + − + − +

x_2 : − − + + − − + +

x_3 : − − − − + + + +

Также оценивают x_1x_2, x_1x_3, x_2x_3 и $x_1x_2x_3$.

Проверка статистической модели и поиск оптимума

Регрессия — не окончательный результат: нужно оценить значимость коэффициентов и адекватность прогноза.

01

ПЛАН И ОПЫТЫ

Выбрать факторы и провести опыты по матрице.

02

РЕГРЕССИЯ

Оценить b_0, b_i и эффекты взаимодействия.

03

ПРОВЕРКА

Критерий Стьюдента — коэффициенты; Фишера — адекватность.

04

ОПТИМУМ

Найти лучшие условия и подтвердить их экспериментально.

Важно: без экспериментальных значений у нельзя вычислить конкретные коэффициенты или определить режим оптимума.

Итоги лекции и контрольные вопросы

Планирование эксперимента помогает количественно оценить влияние факторов и сократить число неоправданных испытаний.

ГЛАВНОЕ

1. В полном плане $N = 2^k$.

2. В кодированных координатах $x_i \in \{-1; +1\}$.

3. Регрессия учитывает главные эффекты и взаимодействия.

4. Адекватность проверяют статистическими критериями.

ВОПРОСЫ ДЛЯ СТУДЕНТОВ

Что отличает экспериментально-статистический метод от аналитического?

Зачем кодировать уровни факторов?

Как построить матрицу 2^3?

Как проверить коэффициенты и адекватность модели?