ДӘРІС 4

Лоренц түрлендірулерінің математикалық қасиеттері

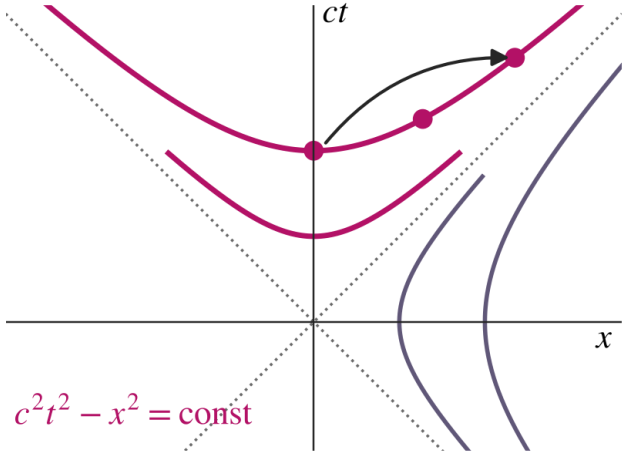
Қауымдастырылған профессор
Уразалина Айнур Адилхановна

Дәріс мақсаты

БІЛІМ АЛУШЫЛАРҒА ЛОРЕНЦ ТҮРЛЕНДІРУЛЕРІНІҢ НЕГІЗГІ МАТЕМАТИКАЛЫҚ ҚАСИЕТТЕРІН ТҮСІНДІРУ, ОЛАРДЫҢ АЛГЕБРАЛЫҚ ҚҰРЫЛЫМЫН, СЫЗЫҚТЫЛЫҒЫН, КЕРІ ТҮРЛЕНДІРУЛЕРІН ЖӘНЕ ИНВАРИАНТТЫҚ ҚАСИЕТТЕРІН МЕҢГЕРТУ. ЛОРЕНЦ ТҮРЛЕНДІРУЛЕРІНІҢ КЕҢІСТІК ПЕН УАҚЫТ КООРДИНАТАЛАРЫ АРАСЫНДАҒЫ БАЙЛАНЫСТЫ СИПАТТАУЫН ТҮСІНДІРІП, МАТЕМАТИКАЛЫҚ ӨРНЕКТЕРДІ ТАЛДАУ ЖӘНЕ ТЕОРИЯЛЫҚ БІЛІМДІ ФИЗИКАЛЫҚ ЕСЕПТЕР ШЫҒАРУДА ҚОЛДАНУ ДАҒДЫЛАРЫН ДАМЫТУ.

Лоренц түрлендіруі – төртөлшемді бұрылыс

- Интервал — x, y, z, ct кеңістігіндегі екі әлемдік нүктенің «арақашықтығы».
- Лоренц түрлендіруі бұл ұзындықтарды сақтайды — бұл төртөлшемді бұрылыс (4.1)–(4.2).
- Бұрылыс бұрышы: $\text{th}\psi =/$ (4.3).



Сақталатын шама:

$$c^2t^2 - x^2 = c^2t'^2 - x'^2 \qquad (4.1)$$

Гиперболалық бұрылыс:

$$x = x'\text{ch}\psi + ct'\text{sh}\psi,\ ct = x'\text{sh}\psi + ct'\text{ch}\psi \qquad (4.2)$$

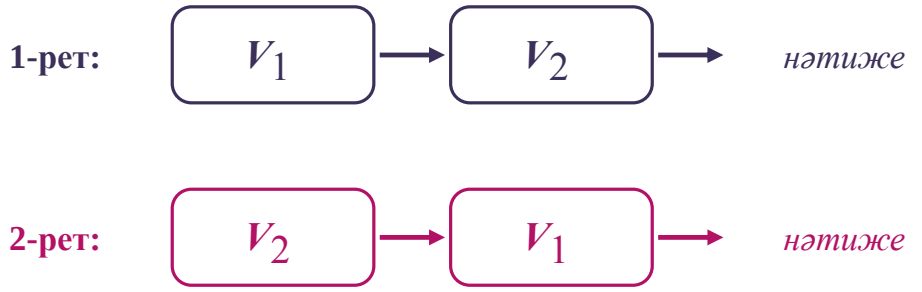
Бұрылу бұрышы:

$$\text{th}\psi = \frac{V}{c} \qquad (4.3)$$

Лоренц түрлендірулерінің коммутативті еместігі

- Галилей түрлендірулері коммутативті: нәтиже ретке тәуелсіз.
- Екі Лоренц түрлендіруінің нәтижесі, жалпы айтқанда, олардың ретіне тәуелді.
- Тек параллель жылдамдықтар үшін олар коммутативті.

Галилей	**Лоренц**
коммутативті: нәтиже ретке тәуелсіз	жалпы жағдайда коммутативті емес



Лоренц үшін: екі нәтиже, жалпы айтқанда, әртүрлі

Төртөлшемдік радиус-вектор

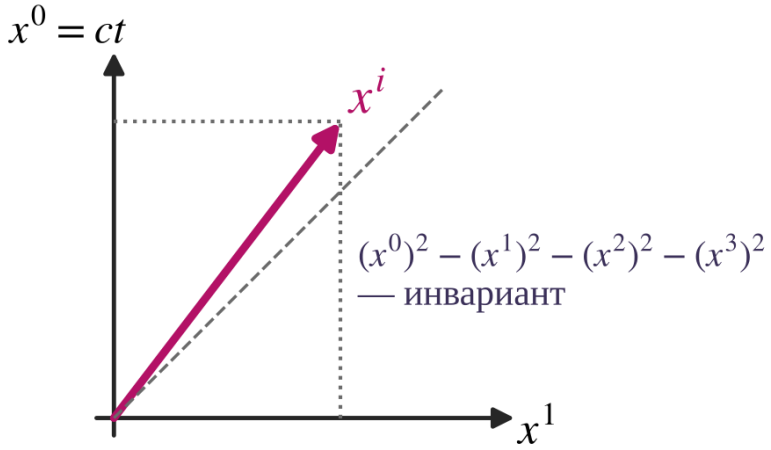
- Оқиға координаттары (t, x, y, z) — 4-радиус-вектордың компоненттері x^i (4.4).
- Индекстер $i = 0,1,2,3$ мәндерін қабылдайды.
- «Ұзындығының» квадраты (4.5) Лоренц түрлендірулерінде өзгермейді.

4-радиус-вектордың компоненттері

$$x^0 = ct,\ x^1 = x,\ x^2 = y,\ x^3 = z \qquad (4.4)$$

«Ұзындығының» квадраты (инвариант)

$$\left(x^0\right)^2 - \left(x^1\right)^2 - \left(x^2\right)^2 - \left(x^3\right)^2 \qquad (4.5)$$



x^0	x^1	x^2	x^3
ct	x	y	z

уақыттық *кеңістіктік компоненттер*

4-вектор және оның түрлендірілу заңы

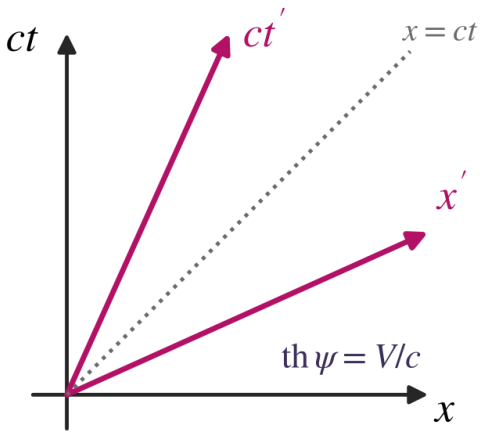
- 4-вектор A^i — 4-радиус-вектор сияқты түрленетін төрт шама.
- Лоренц түрлендірулерінде A^0 мен A^1 араласады, A^2, A^3 өзгермейді (4.6).
- 4-вектордың квадраты барлық ИСЖ-де бірдей (4.7).

4-вектордың Лоренц түрлендірулері

$$A^0 = \frac{A'^0 + \frac{V}{c}A'^1}{\sqrt{1-\frac{V^2}{c^2}}},\ A^1 = \frac{A'^1 + \frac{V}{c}A'^0}{\sqrt{1-\frac{V^2}{c^2}}},\ A^2 = A'^2,\ A^3 = A'^3 \qquad (4.6)$$

4-вектордың квадраты

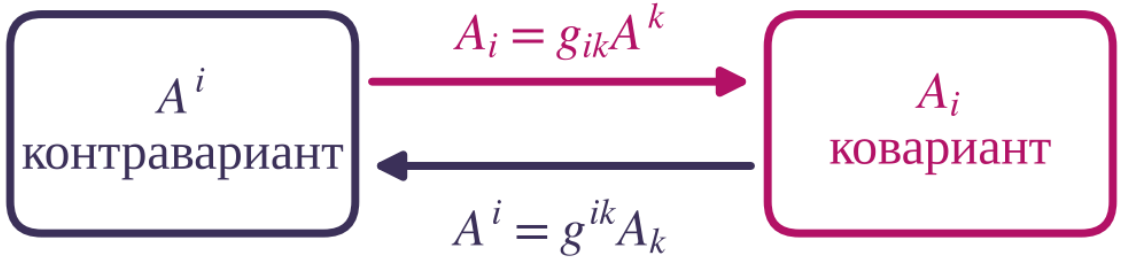
$$\left(A^0\right)^2 - \left(A^1\right)^2 - \left(A^2\right)^2 - \left(A^3\right)^2 \qquad (4.7)$$



$x^0 = ct$	$x^1 = x$	$x^2 = y$	$x^3 = z$
↕	↕	↕	↕
A^0	A^1	A^2	A^3
	араласады	*өзгермейді*	

Контравариантты және ковариантты компоненттер

- Контравариантты A^i және ковариантты A_i компоненттер (4.8).
- Квадрат: $A^i A_i$ (4.9); қайталанатын индекс бойынша қосынды алынады.
- Индексті көтеру/түсіру уақыттық компоненттің таңбасын өзгертпейді, кеңістіктікінікін өзгертеді.



$$A_0 = A^0, \quad A_\alpha = -A^\alpha$$

$$A_0 = A^0, A_1 = -A^1, A_2 = -A^2, A_3 = -A^3 \tag{4.8}$$

$$\sum_{i=0}^{3} A^i A_i = A^0 A_0 + A^1 A_1 + A^2 A_2 + A^3 A_3 \tag{4.9}$$

Ковариантты компоненттердің түрленуі:

$$A_0 = \frac{A'_0 - \frac{V}{c}A'_1}{\sqrt{1-\frac{V^2}{c^2}}}, A_1 = \frac{A'_1 - \frac{V}{c}A'_0}{\sqrt{1-\frac{V^2}{c^2}}}, A_2 = A'_2, A_3 = A'_3 \tag{4.10}$$

Уақыттық белгі

$A_0 = A^0$

таңба сақталады

Кеңістіктік белгі

$A_1 = -A^1$

таңба өзгереді

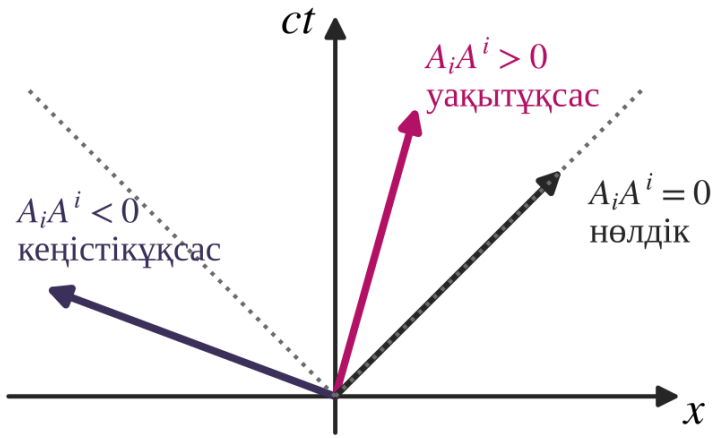
Скаляр көбейтінді. 4-векторлардың түрлері

- Скаляр көбейтінді $A^i B_i$ (4.11) — 4-скаляр, ол инвариантты.
- Уақыттық құраушы A^0, кеңістіктік құраушылар A^1, A^2, A^3 — үшөлшемді вектор.
- 4-векторлар уақытұқсас, кеңістікұқсас және нөлдік болады.

$$A^i B_i = A^0 B_0 + A^1 B_1 + A^2 B_2 + A^3 B_3 \qquad (4.11)$$

$$A^i = \left(A^0, \boldsymbol{A}\right), A_i = \left(A^0, -\boldsymbol{A}\right), A^i A_i = \left(A^0\right)^2 - \boldsymbol{A}^2 \qquad (4.12)$$

$$x^i = (ct, \boldsymbol{r}), x_i = (ct, -\boldsymbol{r}), x^i x_i = c^2 t^2 - r^2 \qquad (4.13)$$



$A^i A_i > 0$	$A^i A_i < 0$	$A^i A_i = 0$
уақытұқсас	*кеңістікұқсас*	*нөлдік*

Төртөлшемдік тензорлар

- 2-рангілі 4-тензор A^{ik} — екі 4-вектордың көбейтіндісі сияқты түрленетін 16 шама.
- Компоненттері: контравариантты A^{ik}, ковариантты A_{ik}, аралас A^{i}-.
- Тензордың ізі A^{i}- — скаляр (4.14).

Тензордың ізі

$$A_i^i = A_0^0 + A_1^1 + A_2^2 + A_3^3 \qquad (4.14)$$

2-рангілі тензор A^{ik}
16 компонент

↓

жиыру: A_i^i
ранг екіге төмендейді

↓

4-скаляр
координат системасының бұрылуына қатысты инвариант

Бірлік тензор және метрикалық тензор

- Бірлік тензор δ^k- (4.15)–(4.16); ізі δ^i- $= 4$.
- Метрикалық тензор $g_{ik} = g^{ik} = \mathrm{diag}(1, -1, -1, -1)$ (4.17).
- Ол индекстерді көтереді және түсіреді (4.18)–(4.19).

$$\delta_i^k A^i = A^k \tag{4.15}$$

$$\delta_i^k = \begin{cases} 1, \text{ егер } i = k, \\ 0, \text{ егер } i \neq k \end{cases} \tag{4.16}$$

$$\left(g^{ik}\right) = \left(g_{ik}\right) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \tag{4.17}$$

$$g_{ik}A^k = A_i,\ g^{ik}A_k = A^i \tag{4.18}$$

$$A^i A_i = g_{ik}A^i A^k = g^{ik}A_i A_k \tag{4.19}$$

$$g_{ik} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

сигнатура $(+, -, -, -)$

Төртөлшемдік градиент

- Скалярдың 4-градиенті $\partial\varphi/\partial^i$ (4.20) — ковариантты 4-вектор.
- Себебі $d = (\partial\varphi/\partial^{i)} dx^i$ — скаляр.
- 4-дивергенция $\partial^{i/\partial^\wedge}$ — скаляр.

Скалярдың 4-градиенті

$$\frac{\partial\varphi}{\partial x^i} = \left(\frac{1}{c}\frac{\partial\varphi}{\partial t}, \nabla\varphi\right) \qquad (4.20)$$

φ – скаляр

↓

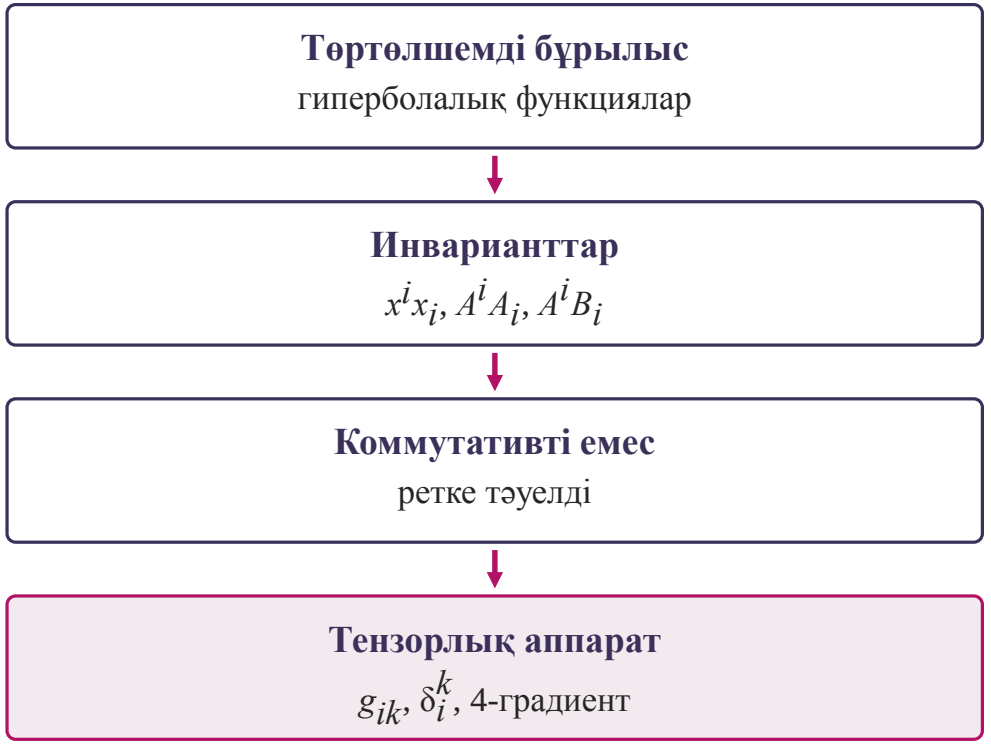
$\frac{\partial\varphi}{\partial x^i}$ **– ковариантты 4-вектор**

↓

$\frac{\partial A^i}{\partial x^i}$ **– скаляр (дивергенция)**

Лоренц түрлендірулерінің негізгі математикалық қасиеттері

- Лоренц түрлендіруі — псевдоевклидтік кеңістіктегі гиперболалық бұрылыс.
- Ол 4-векторлардың квадраттарын және скаляр көбейтінділерін сақтайды.
- Лоренц түрлендірулері, жалпы айтқанда, коммутативті емес.
- Метрикалық тензор g_{ik} — тензорлық аппараттың негізі.



Қорытынды

- Лоренц түрлендіруі — x, y, z, ct псевдоевклидтік кеңістіктегі бұрылыс: $c^2t^2 - x^2$ сақталады.
- Галилей түрлендірулерінен айырмашылығы — Лоренц түрлендірулері, жалпы айтқанда, коммутативті емес.
- 4-радиус-вектор $x^i = (ct, x, y, z)$; 4-вектор A^i дәл осылай түрленеді (4.6).
- Контравариантты A^i және ковариантты A_i компоненттер: $A_0 = A^0$, $A_\alpha = -^\alpha$; скаляр көбейтінді A^iB_i инвариант.
- 4-векторлар уақытұқсас, кеңістікұқсас және нөлдік болып бөлінеді.
- Метрикалық тензор g_{ik} индекстерді көтереді және түсіреді; 4-градиент $\partial\varphi/\partial^i$ — ковариантты 4-вектор.

Негізгі формулалар

$$c^2t^2 - x^2 = \text{inv}$$

$$A^iB_i = A^0B^0 - \text{A} \cdot \text{B}$$

$$g_{ik} = \text{diag}(1, -1, -1, -1)$$

$$A_i = g_{ik}A^k$$

Псевдоевклидтік бұрылыс

↓

4-векторлар A^i, A_i

↓

Скаляр көбейтінді, g_{ik}

↓

Тензорлық аппарат

Пайдаланылған әдебиеттер

1. Шмутцер Э. Теория относительности. Современное представление. М., 2001 г.
2. Эйнштейн А. Теория относительности. Избранные работы. Ижевск: НИЦ Регулярная и хаотическая динамика, 2000 г.
3. Бейзер А. Основные представления современной физики. М.: Атомиздат, 2003 г.
4. Фок В.А. Теория пространства, времени и тяготения. М., 2001 г.
5. Фридман А.А. Мир как пространство и время (2-е изд.). М.: Наука, 1995 г.
6. Шарипов Р.А. Классическая электродинамика и теория относительности. Уфа: БашГУ, 1997 г.
7. Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М. Теоретическая физика. Том 2. Теория поля. Физматлит, 536 с., 2003 г.
8. Мармо С.И., Фролов М.В. Лекции по электродинамике, Часть 1, 2. ВГУ, 2009 г.
9. Faraoni V. Special Relativity. Springer, 2013 y.
10. Матвеев А.Н. Электродинамика и теория относительности. Высшая школа, 2010 г.
11. Гречко Л.Г., Сугаков В.И., Томасевич О.Ф., Федорченко А.М. Задачи по теоретической физике. Издательство Мир, 1997 г.
12. Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М. Теориялық физика. II том: Өріс теориясы: оқулық / ауд. Т.Ә. Қожамқұлов, Н. Қойшыбаев. – Алматы: Қазақ университеті, 2009. – 563 б. – ISBN 9965-30-772-5.