ДӘРІС 6

Релятивистік жылдамдықтарды түрлендіру

Қауымдастырылған профессор
Уразалина Айнур Адилхановна

Дәріс мақсаты

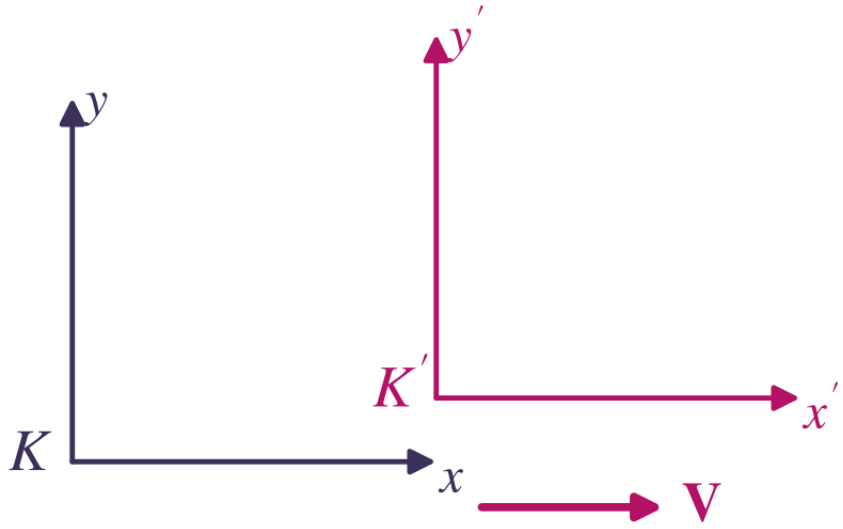
ДӘРІСТІҢ МАҚСАТЫ: БІР ИНЕРЦИАЛДЫҚ САНАҚ ЖҮЙЕСІНЕН ЕКІНШІСІНЕ ӨТКЕНДЕ БӨЛШЕК ЖЫЛДАМДЫҒЫ ҚАЛАЙ ТҮРЛЕНЕТІНІН ЛОРЕНЦ ТҮРЛЕНДІРУЛЕРІНЕН ҚОРЫТЫП ШЫҒАРУ, КЛАССИКАЛЫҚ ШЕКТІ ТЕКСЕРУ ЖӘНЕ ЖАРЫҚТЫҢ АБЕРРАЦИЯСЫН ТҮСІНДІРУ.

Еске түсіру: Лоренц түрлендірулері

- K′ жүйесі K жүйесіне қатысты x осінің бойымен тұрақты V жылдамдықпен қозғалады.
- Оқиғаның K′-тағы координаттары бойынша оның K-дағы координаттары:

$$x = \frac{x' + Vt'}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}}, \quad y = y', \quad z = z', \quad t = \frac{t' + \frac{V}{c^2}x'}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}} \qquad (6.1)$$

- $c \to \infty$ шегінде: $x = x' + Vt'$, $t = t'$ — Галилей түрлендіруі.
- Белгілеу: V — екі ИСЖ-нің тұрақты салыстырмалы жылдамдығы; v — бөлшек жылдамдығы (тұрақты болуы міндетті емес).



1-сурет. Екі инерциалдық санақ жүйесі

Есептің қойылуы

Бөлшек K′ жүйесінде $\mathbf{v}'$ жылдамдықпен қозғалады. Оның K жүйесіндегі $\mathbf{v}$ жылдамдығы неге тең?

Анықтама бойынша: $\mathbf{v} = \frac{d\mathbf{r}}{dt}, \qquad \mathbf{v}' = \frac{d\mathbf{r}'}{dt'}$

Классикалық механика

Уақыт абсолютті: $t = t'$, демек $dt = dt'$.

$d\mathbf{r} = d\mathbf{r}' + \mathbf{V}\,dt'$ теңдігін dt-ға бөлсек:

$$\mathbf{v} = \mathbf{v}' + \mathbf{V}$$

Салыстырмалық теориясы

Уақыт абсолютті емес: $dt \neq dt'$, ол dx'-қа да тәуелді.

Жылдамдықтың алымы да ($d\mathbf{r}$), бөлімі де (dt) түрленеді.

Қорытынды: $\mathbf{v} \neq \mathbf{v}' + \mathbf{V}$; жаңа заң керек.

Негізгі идея: жылдамдық — бөлшектің әлемдік сызығындағы шексіз жақын екі оқиға координаттары мен уақыттары айырымдарының қатынасы. Сондықтан (6.1)-тің дифференциалдарын алу жеткілікті.

Қорытып шығару: (6.1)-тің дифференциалдары

1. (6.1) сызықтық әрі V тұрақты, сондықтан дифференциалдар да дәл солай түрленеді:

$$dx = \frac{dx' + V\,dt'}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}}, \quad dy = dy', \quad dz = dz', \quad dt = \frac{dt' + \frac{V}{c^2}dx'}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}}$$

2. Үш теңдікті төртіншісіне бөліп, алым мен бөлімді dt'-қа бөлеміз ($v'_x = dx'/dt'$); түбірлер қысқарады:

$$v_x = \frac{dx}{dt} = \frac{dx' + V\,dt'}{dt' + \frac{V}{c^2}dx'} = \frac{v'_x + V}{1 + \frac{v'_x V}{c^2}}$$

3. Көлденең компоненттерде $dy = dy'$, бірақ $dt \neq dt'$, сондықтан түбір қалады:

$$v_y = \frac{dy}{dt} = \frac{dy'\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}}{dt' + \frac{V}{c^2}dx'} = \frac{v'_y\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}}{1 + \frac{v'_x V}{c^2}}$$

Жылдамдықтарды қосудың релятивистік заңы

$$v_x = \frac{v'_x + V}{1 + \frac{v'_x V}{c^2}}, \qquad v_y = \frac{v'_y \sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}}{1 + \frac{v'_x V}{c^2}}, \qquad v_z = \frac{v'_z \sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}}{1 + \frac{v'_x V}{c^2}} \tag{6.2}$$

Классикалық шек

$c \to \infty$ болғанда:

$v_x = v'_x + V, \quad v_y = v'_y, \quad v_z = v'_z$

— Галилейдің қосу заңы.

Кері түрлендіру

К жүйесі К′-қа қатысты $-V$ жылдамдықпен қозғалады, сондықтан:

$$v'_x = \frac{v_x - V}{1 - \frac{v_x V}{c^2}}$$

Жаңа эффект

Қозғалысқа **перпендикуляр** компоненттер де өзгереді, бірақ $dy = dy'$, $dz = dz'$.

Себебі — уақыттың салыстырмалылығы: $dt \neq dt'$.

Бір түзудің бойымен қосу: c — шекті жылдамдық

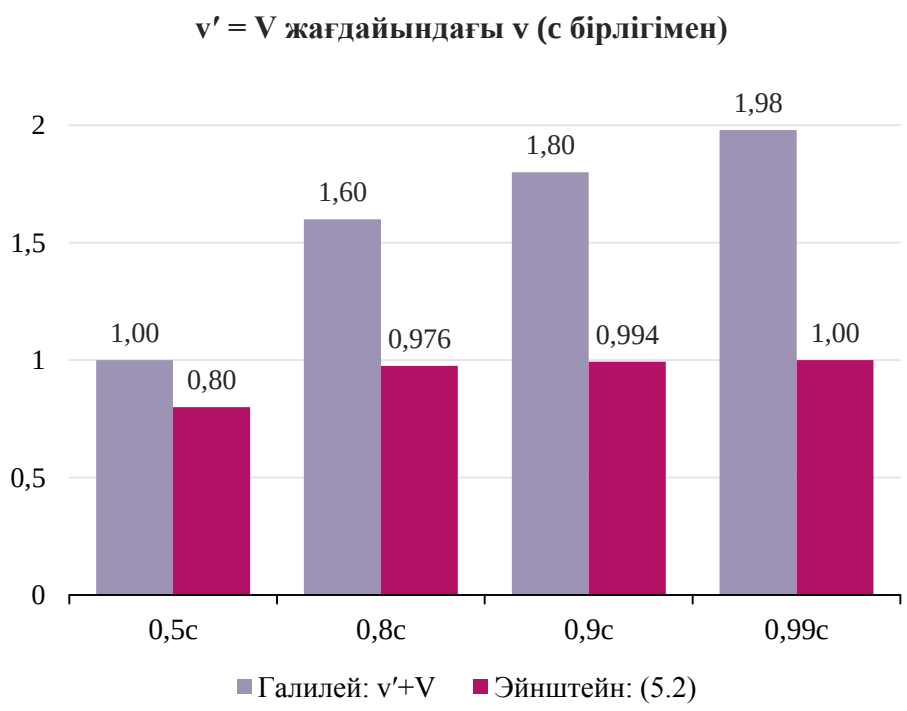
Бөлшек x осіне параллель қозғалсын: $v_x = v,\ v_y = v_z = 0$, онда $v'_x = v',\ v'_y = v'_z = 0$.

$$v = \frac{v' + V}{1 + \dfrac{v'V}{c^2}} \qquad (6.3)$$

Нәтиже c-дан аспайды. Тікелей есептеу:

$$c - v = \frac{(c - v')(c - V)}{c + \dfrac{v'V}{c}} \geq 0 \quad (v' \leq c,\ V \leq c)$$

- $v' = c$ болса, кез келген V үшін $v = c$: жарық жылдамдығы барлық ИСС-те бірдей.
- $v', V \ll c$ болса, $v \approx v' + V$.



2-сурет. Сандық мысал — кітапта жоқ, (6.3) бойынша есептелді

Аз жылдамдықтар жуықтауы: $V \ll c$

V/c бойынша бірінші ретке дейін жіктейміз ($\mathbf{v}'$ — кез келген):

$$\left(1+\frac{v'_x V}{c^2}\right)^{-1} \approx 1-\frac{v'_x V}{c^2}, \qquad \sqrt{1-\frac{V^2}{c^2}} \approx 1$$

$$v_x \approx v'_x + V\left(1-\frac{{v'_x}^2}{c^2}\right)$$

$$v_y \approx v'_y - v'_x v'_y \frac{V}{c^2}, \qquad v_z \approx v'_z - v'_x v'_z \frac{V}{c^2}$$

Үш өрнек бір векторлық теңдікке біріктіріледі:

$$\mathbf{v} = \mathbf{v}' + \mathbf{V} - \frac{1}{c^2}(\mathbf{V}\cdot\mathbf{v}')\,\mathbf{v}' \qquad (6.4)$$

Неліктен $\mathbf{v}'$ пен $\mathbf{V}$ симметриялы емес?

(6.2)-ге $\mathbf{v}'$ мен $\mathbf{V}$ симметриялы түрде кірмейді (екеуі де x осіне параллель жағдайдан басқа).

Бұл — Лоренц түрлендірулерінің **коммутативті еместігінің** салдары.

Геометриялық мағынасы: түрлі осьтердің төңірегіндегі екі төртөлшемді «бұрылыстың» нәтижесі олардың ретіне тәуелді.

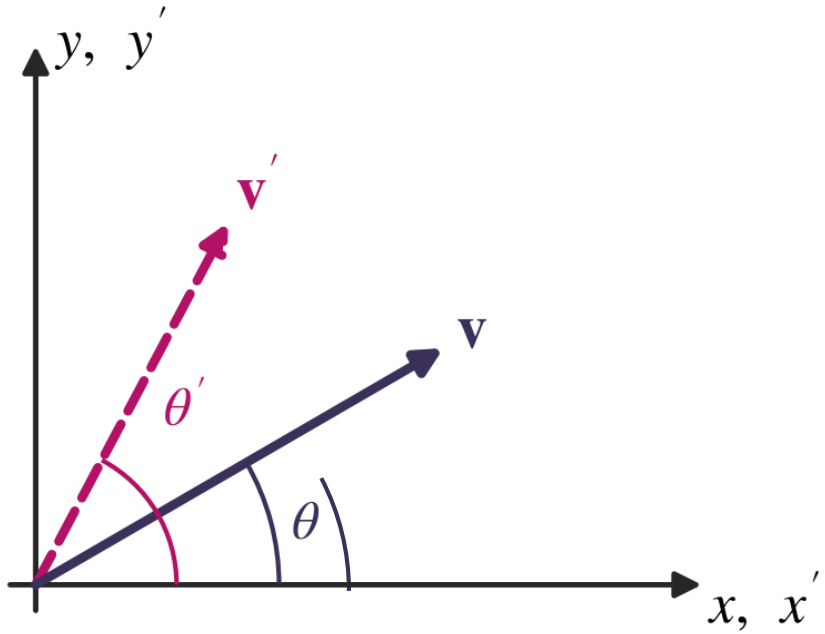
Жылдамдық бағытының түрлендірілуі

- Координаттар осін бөлшекің жылдамдығы берілген уақыт мезетінде xy жазықтығында жататындай таңдаймыз.
- $v_x = v\cos\theta,\ v_y = v\sin\theta;\ v'_x = v'\cos\theta',\ v'_y = v'\sin\theta'.$

$\mathrm{tg}\theta = v_y/v_x$ — (6.2)-дің ортақ бөлімі қысқарады:

$$\mathrm{tg}\theta = \frac{v'\sqrt{1-\frac{V^2}{c^2}}\sin\theta'}{v'\cos\theta' + V} \qquad (6.5)$$

- Жылдамдық бағыты санақ жүйесіне тәуелді: жалпы жағдайда $\theta \neq \theta'$.
- $c \to \infty$: $\mathrm{tg}\theta = \frac{v'\sin\theta'}{v'\cos\theta'+V}$ — векторларды қосу ережесі.



3-сурет. Бір бөлшек: K′-та **v**′, K-да **v** ($V = 0{,}6c,\ v' = 0{,}8c$)

Жарықтың аберрациясы

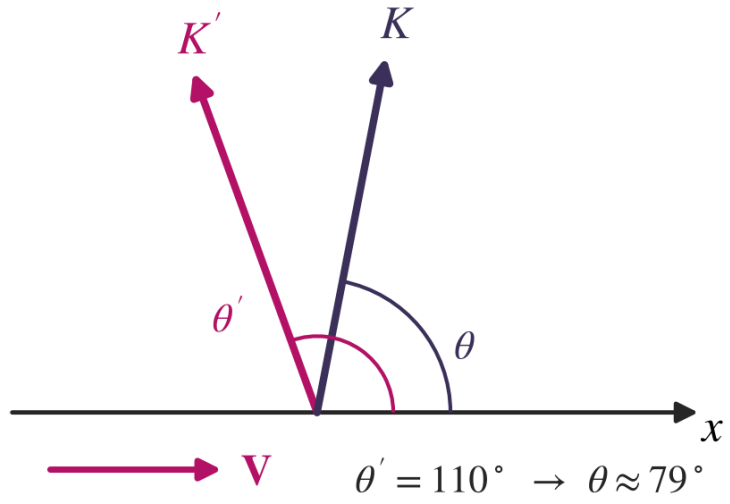
Аберрация — бір санақ жүйесінен екіншісіне өткенде жарық таралу бағытының өзгеруі. (6.5)-те $v = v' = c$ деп аламыз:

$$\operatorname{tg}\theta = \frac{\sqrt{1-\frac{V^2}{c^2}}\,\sin\theta'}{\cos\theta' + \frac{V}{c}} \qquad (6.6)$$

(6.2)-ден sin θ мен cos θ үшін де:

$$\sin\theta = \frac{\sqrt{1-\frac{V^2}{c^2}}\,\sin\theta'}{1+\frac{V}{c}\cos\theta'}, \qquad \cos\theta = \frac{\cos\theta' + \frac{V}{c}}{1+\frac{V}{c}\cos\theta'} \qquad (6.7)$$

Тексеру: $\sin^2\theta + \cos^2\theta = 1$, себебі алымдардың квадраттарының қосындысы $\left(1+\frac{V}{c}\cos\theta'\right)^2$-ге тең.



4-сурет. Бір сәуленің бағыты ($V = 0{,}5c$, $\theta' = 110°$)

Аберрация бұрышы: $V \ll c$ шегі

(6.7)-ны V/c бойынша бірінші ретке дейін жіктесек:

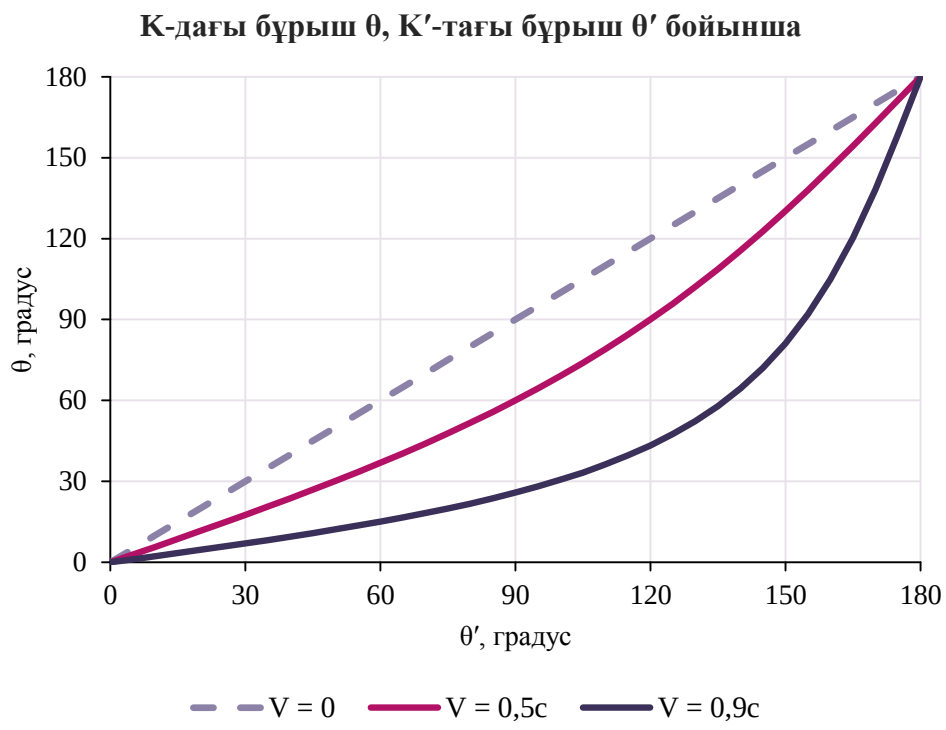
$$\sin\theta - \sin\theta' = -\frac{V}{c}\sin\theta'\cos\theta'$$

Аберрация бұрышын $\Delta\theta = \theta' - \theta$ енгізейік; ол аз:

$$\sin\theta - \sin\theta' \approx -\cos\theta'\,\Delta\theta$$

$$\Delta\theta = \frac{V}{c}\sin\theta' \qquad (6.8)$$

Мысал (қосымша, кітапта жоқ). Жердің орбиталық жылдамдығы $V \approx 30$ *км/с*, $V/c \approx 10^{-4}$, демек $\Delta\theta_{\max} \approx 10^{-4}$ *рад* $\approx$ *20,5″* — жұлдыздардың жылдық аберрациясы.



5-сурет. (6.7) бойынша есептелді; $\theta < \theta'$ — сәулелер V бағытына қарай жиналады

Қорытынды

- (6.2) Лоренц түрлендірулерінің дифференциалдарынан алынады; $c \to \infty$ шегінде — Галилей заңы.
- Жарық жылдамдығынан аспайтын жылдамдықтарды қосқанда c-дан үлкен жылдамдық шықпайды; $v' = c \Rightarrow v = c$.
- Көлденең компоненттер де түрленеді — уақыттың салыстырмалылығының салдары.
- (6.2) заңы $\mathbf{v}'$ мен $\mathbf{V}$ бойынша симметриялы емес — Лоренц түрлендірулері коммутативті емес.
- Жылдамдық бағыты санақ жүйесіне тәуелді (6.5); жарық үшін — аберрация (6.6)–(6.8).

Қосымша: бұрылу бұрыштарының қосылуы

(4.2)-ден $\text{th}\psi = V/c$. Коллинеар жылдамдықтар үшін бұрыштар жай қосылады:

$$\psi = \psi' + \psi_V$$

$\text{th}(\psi' + \psi_V)$ формуласы дәл (6.3)-ні береді. (Кітапта тікелей айтылмаған.)

Лоренц түрлендірулері (6.1) → Дифференциалдарды бөлу → Жылдамдықтарды қосу заңы (6.2) → **Жарықтың аберрациясы (6.6)**

Пайдаланылған әдебиеттер

1. Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М. Теориялық физика. II том: Өріс теориясы: оқулық / ауд. Т.Ә. Қожамқұлов, Н. Қойшыбаев. – Алматы: Қазақ университеті, 2009. – 563 б. – ISBN 9965-30-772-5.
2. Мармо С.И., Фролов М.В. Лекции по электродинамике, ч.2, Специальная теория относительности и электромагнитные явления, Издательский дом ВГУ, 2014 г.
3. Бижігітов Т. Электродинамика және салыстырмалықтың арнайы теориясы/ Оқулық. – Алматы: ЖШС РПБК «Дәуір», 448 б., 2012 ж.
4. Матвеев А.Н. Электродинамика и теория относительсности, Издательство: Высшая школа, Москва, 1985 г. Faraoni Valerio, Special Relativity, Springer, Switzerland, 2013 year.
5. Угаров В.А. Специальная теория относительности, Издательство: Наука, Москва, 2009 г.
6. Розман Г.А. Теория относительности, Издательство: ПГПУ, Псков, 2005 г.
7. Джексон Дж. Классическая электродинамика, Издательство: Мир, Москва, 1988 г.
8. Яковлев В.И. Классическая электродинамика: Учеб. пособие/ Но-восиб. ун-т. Новосибирск, 267 с., 2003 г.
9. Griffiths D.J. Introduction to Electrodynamics, Addison-Wesley, New Jersey, 2013 year.
10. Гречко Л.Г., Сугаков В.И., Томасевич О.Ф., Федорченко А.М. Задачи по теоретической физике, Издательство: Мир, 1997 г.