ДӘРІС 8

Еркін бөлшектің импульсі мен энергиясы

Қауымдастырылған профессор
Уразалина Айнур Адилхановна

Дәріс мақсаты

ДӘРІСТІҢ МАҚСАТЫ: ИМПУЛЬС ПЕН КҮШ, ЭНЕРГИЯ ЖӘНЕ ТЫНЫШТЫҚ ЭНЕРГИЯСЫ, КҮРДЕЛІ ДЕНЕНІҢ МАССАСЫ, ЭНЕРГИЯ МЕН ИМПУЛЬС БАЙЛАНЫСЫ, МАССАСЫЗ БӨЛШЕКТЕР, 4-ИМПУЛЬС, ОНЫҢ ТҮРЛЕНДІРІЛУІ, 4-КҮШ ЖӘНЕ РЕЛЯТИВИСТІК ГАМИЛЬТОН–ЯКОБИ ТЕҢДЕУІ. СУРЕТТЕГІ ҮШБҰРЫШ — (8.6)-НЫ ЕСТЕ САҚТАУҒА АРНАЛҒАН МНЕМОНИКА .

Импульс және күш

Күш — импульстің уақыт бойынша туындысы:

$$\mathbf{p} = \frac{m\mathbf{v}}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}, \qquad \mathbf{f} = \frac{d\mathbf{p}}{dt} \tag{8.1}$$

Жылдамдықтың бағыты ғана өзгереді
$\mathbf{f} \perp \mathbf{v}$, $v = const$:

$$\mathbf{f} = \frac{m}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} \frac{d\mathbf{v}}{dt} \tag{8.2}$$

Жылдамдықтың шамасы ғана өзгереді
$\mathbf{f} \parallel \mathbf{v}$:

$$\mathbf{f} = \frac{m}{\left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)^{3/2}} \frac{d\mathbf{v}}{dt} \tag{8.3}$$

Неге екі түрлі?

$\mathbf{p} = \gamma m\mathbf{v}$, мұнда $\gamma = 1/\sqrt{1 - v^2/c^2}$ (белгілеу кітапта жоқ).

$v = const$ болса, γ тұрақты, тек **v**-ның бағыты дифференциалданады.

v бағыты тұрақты болса:

$$\frac{d(\gamma v)}{dv} = \frac{1}{\left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)^{3/2}}$$

Күштің үдеуге қатынасы екі жағдайда түрліше — «масса» бағытқа тәуелді болып шығады.

Энергия. Тыныштық энергиясы

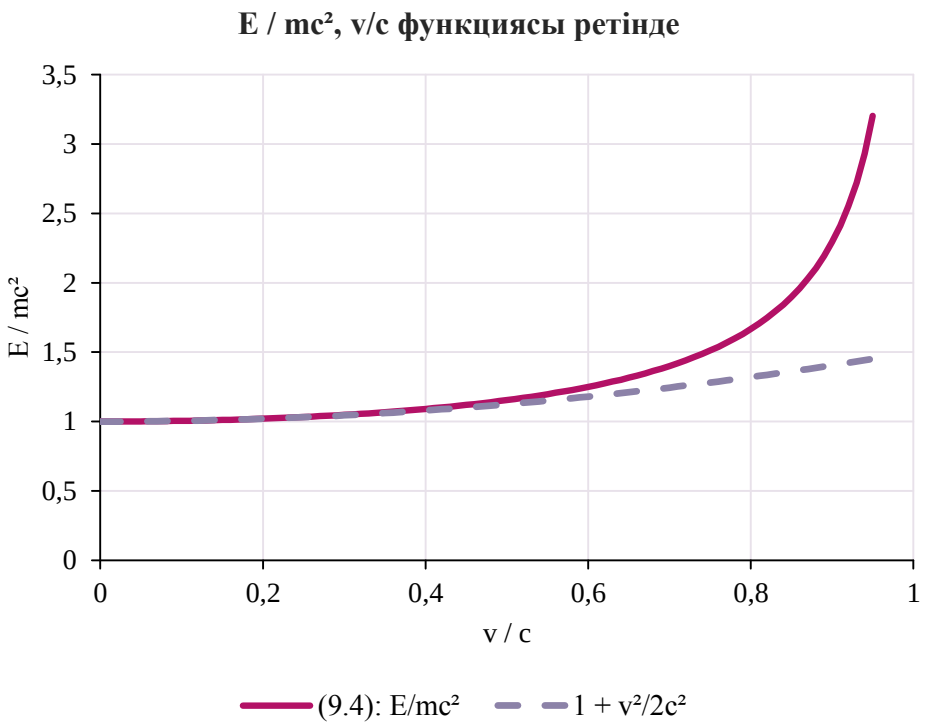
$E = \mathbf{p} \cdot \mathbf{v} - L$ (7-дәріс):

$$E = \frac{mc^2}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \qquad (8.4)$$

$v = 0$ кезінде энергия нөлге айналмайды:

$$E = mc^2 \qquad (8.5)$$

- **Тыныштық энергиясы** — бөлшектің өзі тыныштықта тұрғандағы энергиясы.
- $v \ll c$: $E \approx mc^2 + \frac{mv^2}{2}$ — тыныштық энергиясын алып тастасақ, классикалық кинетикалық энергия.



Күрделі дене: масса аддитивті емес

- Формулаларда бөлшектің «элементарлылығы» пайдаланылмаған: олар күрделі денеге де қолданылады, m — дененің толық массасы, **v** — оның тұтас қозғалыс жылдамдығы.
- Еркін дененің энергиясы — массамен байланысқан, бір мәнді анықталған және әрқашан **оң** шама.
- Классикалық механикада энергия аддитивті тұрақтыға дейін анықталады — оң да, теріс те бола алады.

$$Mc^2 = \sum_a (m_a c^2 + T_a) + U, \qquad M \neq \sum_a m_a$$

T_a — кинетикалық, U — өзара әрекеттесу энергиясы (белгілеулер кітапта жоқ)

Салдары: релятивистік механикада массаның сақталу заңы орындалмайды. Оның орнына тек **энергияның сақталу заңы** бар, оған бөлшектердің тыныштық энергиялары да кіреді.

Мысал (қосымша)

Массасы m екі бөлшек массалар центрі жүйесінде бір-біріне қарсы v жылдамдықпен қозғалады. Жүйенің толық импульсі нөлге тең, ал энергиясы:

$$Mc^2 = \frac{2mc^2}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}$$

$v = 0{,}6c$ болса, $M = 2{,}5m > 2m$.

Жүйенің массасы құраушы бөліктер массаларының қосындысынан үлкен.

Энергия мен импульс арасындағы байланыс

(8.1) мен (8.4)-ті квадраттап салыстырсақ (7-дәріс):

$$\frac{E^2}{c^2} = p^2 + m^2c^2 \qquad (8.6)$$

$$\mathcal{H} = c\sqrt{p^2 + m^2c^2} \qquad (8.7)$$

(8.1)-ді (8.4)-ке бөлсек, массасыз қатынас шығады:

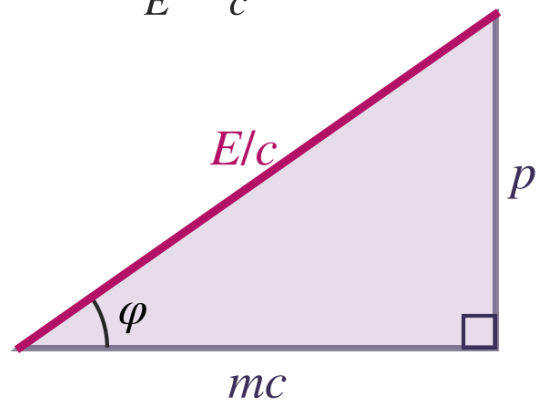
$$\mathbf{p} = \frac{E\mathbf{v}}{c^2} \qquad (8.8)$$

(8.8)-де m жоқ — сондықтан ол массасыз бөлшектерге де қолданылады.

Мнемоника (кітапта жоқ)

$\sin\varphi = \frac{pc}{E} = \frac{v}{c}$, $\cos\varphi = \sqrt{1 - v^2/c^2}$

$$\sin\varphi = \frac{pc}{E} = \frac{v}{c}$$



1-сурет. (8.6) — Пифагор теоремасы түрінде: гипотенуза E/c, катеттер mc және p.

Массасыз бөлшектер

- $v = c$ кезінде $m \neq 0$ бөлшектің импульсі мен энергиясы шексіз: массасы нөлден ерекше бөлшек жарық жылдамдығымен қозғала алмайды.
- Бірақ **массасы нөлге тең**, жарық жылдамдығымен қозғалатын бөлшектер болуы мүмкін. (8.8)-ден $v = c$:

$$p = \frac{E}{c} \qquad (8.9)$$

Ультрарелятивистік жағдай: $E \gg mc^2$ болса, (8.9) массасы нөлден ерекше бөлшек үшін де жуықтап орындалады: (8.6)-да m^2c^2 мүшесі p^2-мен салыстырғанда аз.

Мысал (қосымша): $E = 10\,mc^2$ болса, $v/c = \sqrt{1 - 1/100} \approx 0{,}995$ және $pc/E \approx 0{,}995$.

Кітаптағы ескерту және қазіргі көзқарас

Ландаудың сілтемесі бойынша, мұндай бөлшектер — жарық кванттары (**фотондар**), «сонымен қатар, мүмкін, нейтрино».

Түзету: қазіргі деректер бойынша (нейтрино тербелістері) нейтринолардың массасы өте аз, бірақ нөлге тең емес. Сондықтан олар ультрарелятивистік бөлшектер, ал (8.9) олар үшін тек жуықтап орындалады.

Қысқаша: 4-өлшемді белгілеулер

Төртөлшемді векторлар 9–10-дәрістерде толық қарастырылады; мұнда тек 9 дәріс үшін қажеттісі:

4-радиус-вектор	$x^i = (ct,\ x,\ y,\ z), \qquad x_i = (ct,\ -x,\ -y,\ -z)$	контравариантты және ковариантты компоненттер
Скаляр көбейтінді	$A_i B^i = A^0 B^0 - \mathbf{A} \cdot \mathbf{B}, \qquad ds^2 = dx_i\, dx^i$	қайталанатын индекс бойынша қосынды
4-жылдамдық (5.21)	$u^i = \dfrac{dx^i}{ds} = \left(\dfrac{1}{\sqrt{1 - v^2/c^2}},\ \dfrac{\mathbf{v}}{c\sqrt{1 - v^2/c^2}} \right)$	өлшемсіз 4-вектор
Нормалау (5.22)	$u_i u^i = 1$	$ds^2 = dx_i dx^i$ теңдігінен

Әсердің вариациясы

Барлық нәтижелерді 4-өлшемді түрде шығарайық. Ең кіші әсер принципі:

$$\delta S = -mc\,\delta \int_a^b d\,s = 0, \qquad ds = \sqrt{dx_i\,dx^i}$$

1. $\delta ds = \frac{dx_i\,\delta dx^i}{ds} = u_i\,d\delta x^i$ болғандықтан:

$$\delta S = -mc \int_a^b \frac{dx_i\,d\delta x^i}{ds} = -mc \int_a^b u_i\;d\delta x^i$$

2. Бөліктеп интегралдаймыз:

$$\delta S = -mc\,u_i\,\delta x^i\Big|_a^b + mc \int_a^b \delta\,x^i\,\frac{du_i}{ds}\,ds \qquad (8.10)$$

Қозғалыс теңдеуі: шеттер бекітілген ($(\delta x^i)_a = (\delta x^i)_b = 0$) болса, $\delta S = 0$ шарты $\frac{du_i}{ds} = 0$ береді — еркін бөлшектің 4-жылдамдығы тұрақты.

4-импульс

Енді тек a нүктесі бекітілген, ал екінші нүкте айнымалы деп санаймыз (тек нағыз траекториялар). Онда (8.10)-дағы интеграл нөлге тең, $\left(\delta x^i\right)_b$ орнына δx^i:

$$\delta S = -mc\, u_i\, \delta x^i \tag{8.11}$$

$$p_i = -\frac{\partial S}{\partial x^i} = mc\, u_i \tag{8.12}$$

- Механикадан: $\partial S/\partial \mathbf{r} = \mathbf{p}$, $\partial S/\partial t = -E$. Сондықтан $p_i = (E/c,\ -\mathbf{p})$.
- (5.21)-ні (8.14)-ке қойсақ, кеңістіктік және уақыттық компоненттерден (8.1) мен (8.4) шығады.

Контравариантты компоненттер

$$p^i = \left(\frac{E}{c},\ \mathbf{p}\right) \tag{8.13}$$

$$p^i = mc\, u^i \tag{8.14}$$

Импульс пен энергия — **бір 4-вектордың** компоненттері.

Тексеру: $mc\, u^0 = \frac{mc}{\sqrt{1-v^2/c^2}} = \frac{E}{c}$.

Энергия мен импульсті түрлендіру. Инвариант

(4.6) түрлендіруіне (8.13)-ті қоямыз (K′ жүйесі x бойымен V жылдамдықпен қозғалады):

$$p_x = \frac{p'_x + \frac{V}{c^2}E'}{\sqrt{1-\frac{V^2}{c^2}}}, \quad p_y = p'_y, \quad p_z = p'_z, \quad E = \frac{E' + Vp'_x}{\sqrt{1-\frac{V^2}{c^2}}} \tag{8.15}$$

(8.14) мен $u_i u^i = 1$ теңдігінен:

$$p_i p^i = m^2 c^2 \tag{8.16}$$

(8.13)-ті қойсақ, $p_i p^i = E^2/c^2 - p^2$ — яғни (8.6)-ға қайта ораламыз. 4-импульстің «ұзындығы» — бөлшектің массасы, ол барлық ИСС-те бірдей.

Мысал (қосымша)

K′ жүйесінде бөлшек тыныштықта: $E' = mc^2$, $\mathbf{p}' = 0$. (8.15) бойынша K-да:

$$p_x = \frac{mV}{\sqrt{1-\frac{V^2}{c^2}}}, \qquad E = \frac{mc^2}{\sqrt{1-\frac{V^2}{c^2}}}$$

— (8.1) және (8.4) $v = V$ үшін. Түрлендіру өрнектері үйлесімді.

4-күш

4-күш — 4-импульстің s бойынша туындысы ($\mathbf{f} = d\mathbf{p}/dt$ ұқсас):

$$g^i = \frac{dp^i}{ds} = mc\,\frac{du^i}{ds} \tag{8.17}$$

Үшөлшемді күш $\mathbf{f} = d\mathbf{p}/dt$ арқылы:

$$g^i = \left(\frac{\mathbf{f}\cdot\mathbf{v}}{c^2\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}},\ \frac{\mathbf{f}}{c\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} \right) \tag{8.18}$$

- Компоненттері $g_i u^i = 0$ теңдігін қанағаттандырады ($u_i u^i = 1$-ді дифференциалдаудан).
- Уақыттық компонент күштің **жұмысымен** байланысты.

(8.18)-ді қорыту

$ds = c\,dt\sqrt{1-v^2/c^2}$ болғандықтан:

$$g^i = \frac{1}{c\sqrt{1-v^2/c^2}}\left(\frac{1}{c}\frac{dE}{dt},\ \frac{d\mathbf{p}}{dt}\right)$$

(8.6)-дан $E\,dE = c^2\mathbf{p}\cdot d\mathbf{p}$, (8.8) бойынша:

$$\frac{dE}{dt} = \mathbf{v}\cdot\frac{d\mathbf{p}}{dt} = \mathbf{f}\cdot\mathbf{v}$$

— бірлік уақыттағы жұмыс.

Релятивистік Гамильтон–Якоби теңдеуі

(8.16)-ға p_i орнына $-\partial S/\partial x^i$ қойсақ:

$$\frac{\partial S}{\partial x_i}\frac{\partial S}{\partial x^i} = g^{ik}\frac{\partial S}{\partial x^i}\frac{\partial S}{\partial x^k} = m^2c^2 \qquad (8.19)$$

немесе қосындыны ашып жазсақ:

$$\frac{1}{c^2}\left(\frac{\partial S}{\partial t}\right)^2 - \left(\frac{\partial S}{\partial x}\right)^2 - \left(\frac{\partial S}{\partial y}\right)^2 - \left(\frac{\partial S}{\partial z}\right)^2 = m^2c^2 \qquad (8.20)$$

Классикалық шек

Энергияда mc^2 мүшесі бар ($E = -\partial S/\partial t$), сондықтан $S = S' - mc^2t$ енгіземіз. (8.20)-ға қойып, $2m$-ге бөлсек:

$$\frac{1}{2mc^2}\left(\frac{\partial S'}{\partial t}\right)^2 - \frac{\partial S'}{\partial t} - \frac{1}{2m}(\nabla S')^2 = 0 \overset{c\to\infty}{\to} \frac{\partial S'}{\partial t} + \frac{1}{2m}(\nabla S')^2 = 0$$

Қорытынды

- Күштің үдеуге қатынасы бағытқа тәуелді: (8.2) және (8.3).
- Еркін бөлшектің энергиясы $E = mc^2/\sqrt{1 - v^2/c^2}$; тыныштық энергиясы mc^2 (8.5).
- Масса аддитивті емес, массаның сақталу заңы жоқ; тыныштық энергиясын қамтитын энергия сақталады.
- $E^2/c^2 = p^2 + m^2c^2$, $\mathbf{p} = E\mathbf{v}/c^2$; массасыз бөлшектер үшін $p = E/c$.
- Энергия мен импульс бір 4-вектордың компоненттері: $p^i = (E/c,\ \mathbf{p}) = mc\,u^i$; $p_i p^i = m^2c^2$.
- 4-күш $g^i = dp^i/ds$; релятивистік Гамильтон–Якоби теңдеуі (8.20).

Негізгі формулалар

$$E = \frac{mc^2}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}$$

$$\frac{E^2}{c^2} = p^2 + m^2c^2$$

$$p^i = mc\,u^i$$

Пайдаланылған әдебиеттер

1. Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М. Теориялық физика. II том: Өріс теориясы: оқулық / ауд. Т.Ә. Қожамқұлов, Н. Қойшыбаев. – Алматы: Қазақ университеті, 2009. – 563 б. – ISBN 9965-30-772-5.
2. Мармо С.И., Фролов М.В. Лекции по электродинамике, ч.2, Специальная теория относительности и электромагнитные явления, Издательский дом ВГУ, 2014 г.
3. Бижігітов Т. Электродинамика және салыстырмалықтың арнайы теориясы/ Оқулық. – Алматы: ЖШС РПБК «Дәуір», 448 б., 2012 ж.
4. Матвеев А.Н. Электродинамика и теория относительсности, Издательство: Высшая школа, Москва, 1985 г. Faraoni Valerio, Special Relativity, Springer, Switzerland, 2013 year.
5. Угаров В.А. Специальная теория относительности, Издательство: Наука, Москва, 2009 г.
6. Розман Г.А. Теория относительности, Издательство: ПГПУ, Псков, 2005 г.
7. Джексон Дж. Классическая электродинамика, Издательство: Мир, Москва, 1988 г.
8. Яковлев В.И. Классическая электродинамика: Учеб. пособие/ Но-восиб. ун-т. Новосибирск, 267 с., 2003 г.
9. Griffiths D.J. Introduction to Electrodynamics, Addison-Wesley, New Jersey, 2013 year.
10. Гречко Л.Г., Сугаков В.И., Томасевич О.Ф., Федорченко А.М. Задачи по теоретической физике, Издательство: Мир, 1997 г.