ДӘРІС 9

Төртөлшемді векторлар мен тензорлар

Қауымдастырылған профессор
Уразалина Айнур Адилхановна

Дәріс мақсаты

ДӘРІСТІҢ МАҚСАТЫ: САЛЫСТЫРМАЛЫҚ ТЕОРИЯСЫНЫҢ МАТЕМАТИКАЛЫҚ АППАРАТЫН ЕНГІЗУ — 4-ВЕКТОРЛАР МЕН 4-ТЕНЗОРЛАР, КО- ЖӘНЕ КОНТРАВАРИАНТТЫ КОМПОНЕНТТЕР, МЕТРИКАЛЫҚ ТЕНЗОР, ТОЛЫҚ АНТИСИММЕТРИЯЛЫҚ ТЕНЗОР, 4-ГРАДИЕНТ ЖӘНЕ 4-ӨЛШЕМДІ ИНТЕГРАЛДАУ. КЕЛЕСІ ДӘРІСТЕРДЕГІ БАРЛЫҚ ӨРНЕКТЕР ОСЫ БЕЛГІЛЕУЛЕРМЕН ЖАЗЫЛАДЫ.

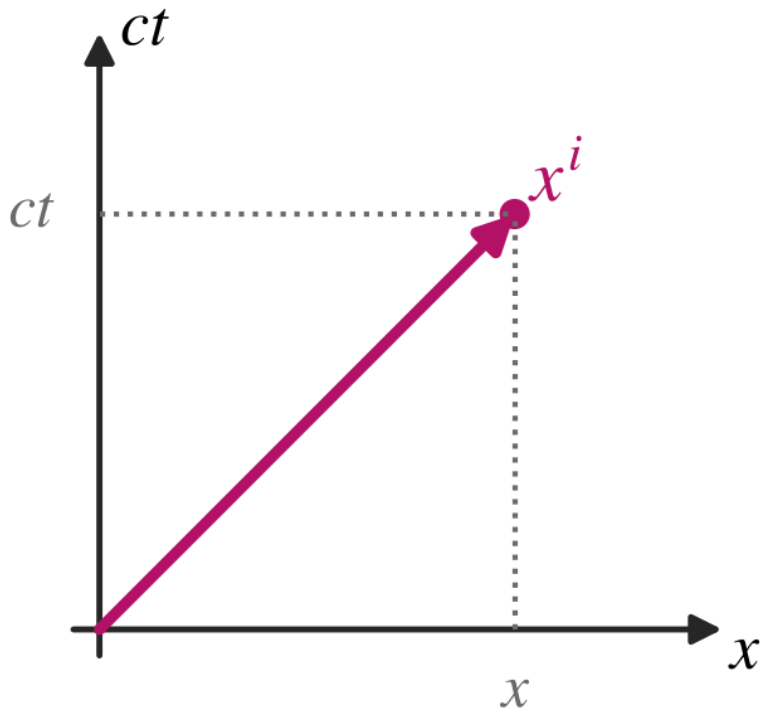
4-радиус-вектор және 4-вектор

- Оқиғаның координаттары $(ct,\ x,\ y,\ z)$ 4-радиус-вектордың компоненттері деп қарастырылады: $x^0 = ct,\ x^1 = x,\ x^2 = y,\ x^3 = z.$
- Оның «ұзындығының» квадраты $(x^0)^2 - (x^1)^2 - (x^2)^2 - (x^3)^2$ Лоренц түрлендірулерінде өзгермейді — бұл интервал.

4-вектор A^i — координат жүйесін түрлендіргенде 4-радиус-вектордың компоненттері сияқты түрленетін төрт шаманың жиынтығы:

$$A^0 = \frac{A'^0 + \frac{V}{c}A'^1}{\sqrt{1-\frac{V^2}{c^2}}},\quad A^1 = \frac{A'^1 + \frac{V}{c}A'^0}{\sqrt{1-\frac{V^2}{c^2}}},\quad A^2 = A'^2,\ A^3 = A'^3 \qquad (9.1)$$

- A^0 — уақыттық, A^1, A^2, A^3 — кеңістіктік компоненттер.
- Кеңістіктік бұрылыстарда A^1, A^2, A^3 үшөлшемді вектор $\mathbf{A}$, ал A^0 скаляр құрайды: $A^i = (A^0,\ \mathbf{A})$.



1-сурет. Оқиға — 4-кеңістіктегі нүкте

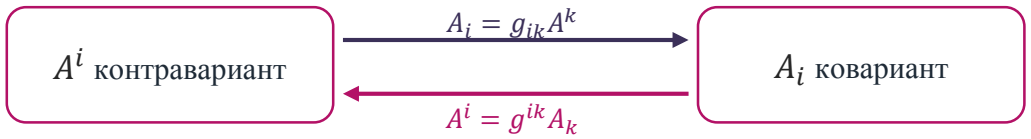
Контравариантты және ковариантты компоненттер

Квадратты ықшам жазу үшін 4-вектордың екі «сорты» енгізіледі: индексі жоғарыда — **контравариантты**, төменде — **ковариантты** компоненттер:

$$A_0 = A^0, \quad A_1 = -A^1, \quad A_2 = -A^2, \quad A_3 = -A^3 \qquad (9.2)$$

$$A^i A_i = A^0 A_0 + A^1 A_1 + A^2 A_2 + A^3 A_3 = (A^0)^2 - \mathbf{A}^2$$

- **Қосынды ережесі:** екі рет қайталанатын индекс бойынша қосынды алынады, қосынды белгісі жазылмайды. Қосақтың бір индексі жоғарыда, екіншісі төменде тұруы керек.
- Мұндай («мылқау») индекстер қосағында жоғарғы мен төменгі орындарды ауыстыруға болады: $A^i B_i = A_i B^i$.
- Латын индекстері $i, k, l, \ldots$ 0, 1, 2, 3 мәндерін, грек индекстері $\alpha, \beta, \ldots$ тек 1, 2, 3 (x, y, z) мәндерін қабылдайды; үшөлшемді векторлар үшін ко- және контравариантты компоненттерді ажыратудың қажеті жоқ.
- 4-радиус-вектор үшін: $x^i = (ct, \mathbf{r}), x_i = (ct, -\mathbf{r}), x^i x_i = c^2 t^2 - r^2$.



Скаляр көбейтінді. 4-векторлардың түрлері

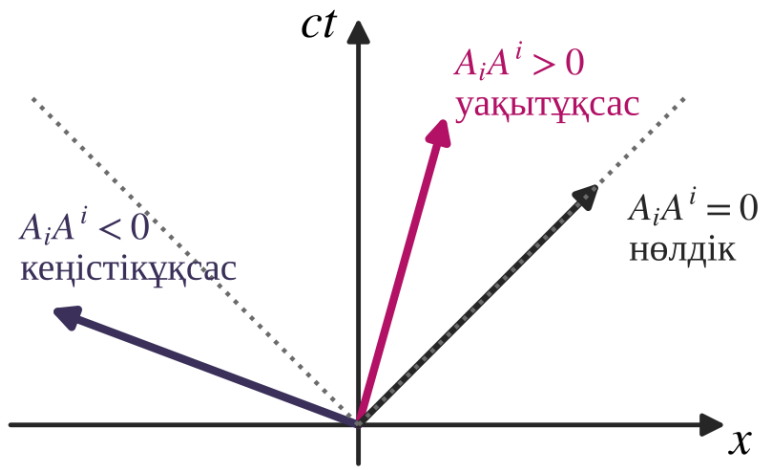
Екі 4-вектордың скаляр көбейтіндісі квадрат сияқты құрылады:

$$A^i B_i = A^0 B_0 + A^1 B_1 + A^2 B_2 + A^3 B_3 = A^0 B^0 - \mathbf{A} \cdot \mathbf{B}$$

- $A^i B_i$ — **4-скаляр**: ол координат жүйесін бұруға (Лоренц түрлендірулеріне) қатысты инвариант, себебі екі 4-вектор бірдей заң бойынша түрленеді.

Квадратының таңбасы бойынша (интервалдар сияқты):

- $A^i A_i > 0$ — **уақытұқсас** (мысалы, 4-жылдамдық);
- $A^i A_i < 0$ — **кеңістікұқсас** (мысалы, 4-үдеу);
- $A^i A_i = 0$ — **нөлдік** (мысалы, жарықтың толқындық 4-векторы).



2-сурет. Жарық конусына қатысты орналасуы

4-тензорлар

- **Екінші рангті 4-тензор** A^{ik} — координаттарды түрлендіргенде екі 4-вектордың көбейтіндісі $A^i B^k$ сияқты түрленетін 16 шама. Жоғары рангті тензорлар дәл осылай анықталады.

- Компоненттерді үш түрде беруге болады: контравариантты A^{ik}, ковариантты A_{ik}, аралас $A^i_{\ k}$ (жалпы жағдайда $A^i_{\ k} \neq A^{\ i}_{k}$).

Ереже: уақыттық индексті (0) көтеру не түсіру ештеңені өзгертпейді, кеңістіктік индексті — таңбаны өзгертеді:

$$A_{00} = A^{00}, \quad A_{01} = -A^{01}, \quad A_{11} = A^{11}, \quad A^0_{\ 1} = -A^{01}, \ \ldots$$

Тензорлық теңдікте екі жақтағы еркін индекстер бірдей орналасуы керек; әртүрлі орналасқан индекстерді теңестіру басқа жүйеге өткенде бұзылады.

Кеңістіктік бұрылыстарда

- $A^{\alpha\beta}$ — тоғыз компонент: үшөлшемді тензор;
- A^{01}, A^{02}, A^{03} және A^{10}, A^{20}, A^{30} — екі үшөлшемді вектор;
- A^{00} — үшөлшемді скаляр.

Бұл бөлу 13-дәрісте өріс тензорының компоненттерін түсіну үшін қажет.

Симметрия. Тензорды жиыру

- $A^{ik} = A^{ki}$ болса — **симметриялық**, $A^{ik} = -A^{ki}$ болса — **антисимметриялық** тензор.
- Антисимметриялық тензордың диагональ компоненттері нөлге тең: $A^{00} = A^{11} = \cdots = 0$.
- Симметриялық тензорда $A^i{}_k = A^i_k$; сондықтан индекстерді бірінің үстіне бірін жазуға болады: A^i_k.

Жиыру (ұқсату) — бір жоғарғы және бір төменгі индекс бойынша қосынды. Мысалы, тензордың **ізі**:

$$A^i{}_i = A^0{}_0 + A^1{}_1 + A^2{}_2 + A^3{}_3$$

- Екі вектордың скаляр көбейтіндісі $A^i B_i$ — $A^i B^k$ тензорын жиыру.

Жиыру рангті екіге кемітеді

$A^i{}_{kl}$	— 3-рангті тензор
$A^i{}_{ki}$	— 4-вектор
$A^{ik}B_k$	— 4-вектор
$A^{ik}B_{ik}$	— скаляр

Мысал: 13-дәрістегі $F_{ik}u^k$ — өріс тензорын 4-жылдамдықпен жиыру, нәтижесі 4-вектор.

Бірлік тензор және метрикалық тензор

Бірлік 4-тензор δ_k^i кез келген 4-вектор үшін мына теңдікті қанағаттандырады:

$$\delta_k^i A^k = A^i \qquad (9.3)$$

$$\delta_k^i = \begin{cases} 1, & i = k \\ 0, & i \neq k \end{cases}, \qquad \delta_i^i = 4 \qquad (9.4)$$

- δ_k^i-ның бір индексін көтеріп не түсіріп, **метрикалық тензор** g^{ik} немесе g_{ik} алынады.
- Олар индекстерді көтеру мен түсіруді жүзеге асырады; скаляр көбейтінді: $A^i A_i = g_{ik} A^i A^k = g^{ik} A_i A_k$ (9.7).

$$g_{ik} = g^{ik} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \qquad (9.5)$$

$$g_{ik} A^k = A_i, \qquad g^{ik} A_k = A^i \qquad (9.6)$$

δ_k^i, g_{ik}, g^{ik} тензорларының ерекшелігі — олардың компоненттері барлық координат жүйелерінде бірдей.

Толық антисимметриялық тензор. Дуалдық

- e^{iklm} — кез келген екі индексінің орнын ауыстырғанда таңбасын өзгертетін 4-рангті тензор. Екі индексі бірдей болса, компонент нөлге тең.
- Тек төрт индексі де әртүрлі компоненттер нөлден ерекше, олар ± 1:

$$e^{0123} = +1 \quad (e_{0123} = -1) \tag{9.8}$$

- $iklm$ орын алмастыруы 0123-тен жұп сан транспозиция арқылы алынса +1, тақ сан болса −1. Мұндай компоненттер саны $4! = 24$:

$$e^{iklm} e_{iklm} = -24 \tag{9.9}$$

e^{iklm} — **псевдотензор**: бұрылыстарда тензор сияқты, бірақ бір немесе үш координаттың таңбасы өзгергенде (шағылыс) компоненттері өзгермейді.

Дуал тензор

Антисимметриялық A^{ik} тензорына дуал псевдотензор:

$$A^{*ik} = \frac{1}{2} e^{iklm} A_{lm}$$

Дәл осылай $e^{iklm} A_m$ — A^i векторына дуал 3-рангті антисимметриялық псевдотензор.

$A^{ik} A^*_{ik}$ — **псевдоскаляр.** (15-дәрістегі $\mathbf{E} \cdot \mathbf{H}$ инвариантының түрі осы.)

Антисимметриялық 4-тензордың құрылымы

- Үшөлшемді кеңістікте антисимметриялық тензор $C_{\beta\gamma} = A_\beta B_\gamma - A_\gamma B_\beta$ аксиал векторға дуал: $C_\alpha = \frac{1}{2} e_{\alpha\beta\gamma} C_{\beta\gamma}$ (бұл $\mathbf{C} = [\mathbf{A} \times \mathbf{B}]$).
- Шағылыста таңбасын өзгертетін векторлар — **полярлық**, өзгертпейтіндер (векторлық көбейтінді) — **аксиалдық**.

- Антисимметриялық A^{ik} 4-тензордың кеңістіктік компоненттері $A^{\alpha\beta}$ — аксиал вектор $\mathbf{a}$, ал A^{01}, A^{02}, A^{03} — полярлық вектор $\mathbf{p}$ құрайды.
- Қысқаша: $A^{ik} = (\mathbf{p}, \mathbf{a})$, $A_{ik} = (-\mathbf{p}, \mathbf{a})$.

$$A^{ik} = \begin{pmatrix} 0 & p_x & p_y & p_z \\ -p_x & 0 & -a_z & a_y \\ -p_y & a_z & 0 & -a_x \\ -p_z & -a_y & a_x & 0 \end{pmatrix} \quad (9.10)$$

- Бірінші жол мен баған — полярлық вектор $\mathbf{p}$.
- Ішкі 3×3 блок — аксиал вектор $\mathbf{a}$.

Мысал: электромагниттік өріс тензорында $\mathbf{p} = -\mathbf{E}$, $\mathbf{a} = \mathbf{H}$ (13-дәріс, (13.5)).

4-градиент және 4-дивергенция

Скалярдың φ туындылары 4-вектор құрайды — **4-градиент**:

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x^i} = \left(\frac{1}{c}\frac{\partial \varphi}{\partial t},\ \nabla \varphi \right)$$

Себебі $d\varphi = \frac{\partial \varphi}{\partial x^i} dx^i$ — скаляр, ал dx^i — 4-вектор.

- $\partial/\partial x^i$ операторы операторлық 4-вектордың **ковариантты** компоненттері деп қарастырылады (жоғарғы индекс бойынша дифференциалдау төменгі индекс береді).
- Сондықтан 4-вектордың **4-дивергенциясы** — скаляр:

$$\frac{\partial A^i}{\partial x^i} = \frac{1}{c}\frac{\partial A^0}{\partial t} + \mathrm{div}\mathbf{A}$$

Мысал: зарядтың сақталу заңы $\partial j^i/\partial x^i = 0$ (11-дәріс).

Әдебиетте ықшам белгілеулер қолданылады: $\partial_i = \partial/\partial x^i$, $\partial^i = \partial/\partial x_i$ немесе $\varphi_{,i}$ (Ландаудың ескертуі, 34 б.).

4-кеңістікте интегралдау

Қисық бойынша	dx^i	ұзындық элементі — 4-вектор
Бет (2-өлшемді) бойынша	$df^{ik} = dx^i dx'^k - dx^k dx'^i$	антисимметриялық тензор; компоненттері — аудан проекциялары
Гипербет бойынша	$dS^i = -\frac{1}{6} e^{iklm} dS_{klm}$	4-вектор, гипербетке «нормаль», (9.11)
4-көлем бойынша	$d\Omega = dx^0 dx^1 dx^2 dx^3 = c\, dt\, dV$	скаляр, (9.12)

Мысалы, $dS^0 = dS^{123} = dx\, dy\, dz$ — үшөлшемді көлем элементі dV: бұл гипербет элементінің $x^0 = const$ гипержазықтығына проекциясы. Толық заряд $\frac{1}{c}\int j^i\, dS_i$ түрінде осылай жазылады (11-дәріс).

Гаусс және Стокс теоремаларының жалпылауы

Тұйық гипербет бойынша интеграл $dS_i \to d\Omega\ \frac{\partial}{\partial x^i}$ алмастыруы арқылы ол қамтитын 4-көлем бойынша интегралға түрленеді (Гаусс теоремасы):

$$\oint A^i\ dS_i = \int \frac{\partial A^i}{\partial x^i}\ d\Omega \tag{9.13}$$

Тұйық сызық бойынша интеграл $dx^i \to df^{ki}\ \frac{\partial}{\partial x^k}$ алмастыруы арқылы ол қамтитын бет бойынша интегралға түрленеді (Стокс теоремасы):

$$\oint A_i\ dx^i = \int d\,f^{ki}\ \frac{\partial A_i}{\partial x^k} = \frac{1}{2}\int d\,f^{ik}\left(\frac{\partial A_k}{\partial x^i} - \frac{\partial A_i}{\partial x^k}\right) \tag{9.14}$$

Екі өлшемді бет бойынша интегралды гипербет бойынша интегралға түрлендіретін аралық теорема да бар (кітапта (6,16)–(6,17)); ол бұл курста қолданылмайды. Мысал: Стокс теоремасындағы жақша — 13-дәрістегі F_{ik} құрылымы.

Антисимметриялық тензорды түрлендіру (2-есеп)

Лоренц түрлендіруі (9.1) кезінде антисимметриялық A^{ik} тензорының компоненттері екі 4-вектор компоненттерінің көбейтіндісі сияқты түрленеді. Нәтиже:

- x^2, x^3 өзгермейтіндіктен A^{23} өзгермейді: $A^{23} = A'^{23}$.
- A^{12}, A^{13} және A^{02}, A^{03} компоненттері x^1 пен x^0 сияқты түрленеді:

$$A^{12} = \frac{A'^{12} + \frac{V}{c}A'^{02}}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}}, \qquad A^{02} = \frac{A'^{02} + \frac{V}{c}A'^{12}}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}}$$

- $A^{01} = A'^{01}$: x^0x^1 жазықтығындағы бұрылыстарға қатысты A^{01} — өлшемділігі осы жазықтықтың өлшемділігіне тең антисимметриялық тензор, сондықтан ол өзгермейді.
- Бұл ереже 14-дәрісте E мен H түрлендірулерін алуда қолданылады.

Қорытынды

- 4-вектор x^i сияқты түрленеді (9.1); контра- және ковариантты компоненттер (9.2), қосынды ережесі.
- Скаляр көбейтінді $A^i B_i$ — инвариант; 4-векторлар уақытұқсас, кеңістікұқсас және нөлдік болады.
- 4-тензорлар, симметрия, жиыру; δ_k^i, g_{ik}, e^{iklm} барлық жүйеде бірдей компоненттерге ие.
- Антисимметриялық тензор $A^{ik} = (\mathbf{p},\ \mathbf{a})$ — полярлық және аксиал вектор (9.10).
- 4-градиент, 4-дивергенция; интегралдау элементтері және Гаусс (9.13), Стокс (9.14) теоремалары.

Негізгі формулалар

$$A^i B_i = A^0 B^0 - \mathbf{A} \cdot \mathbf{B}$$

$$g_{ik} A^k = A_i$$

$$\oint A^i \, dS_i = \int \frac{\partial A^i}{\partial x^i} d\Omega$$

4-вектор A^i → 4-тензорлар A^{ik} → g_{ik}, e^{iklm}, дуалдық → **4-градиент, Гаусс және Стокс теоремалары**

Пайдаланылған әдебиеттер

1. Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М. Теориялық физика. II том: Өріс теориясы: оқулық / ауд. Т.Ә. Қожамқұлов, Н. Қойшыбаев. – Алматы: Қазақ университеті, 2009. – 563 б. – ISBN 9965-30-772-5.
2. Мармо С.И., Фролов М.В. Лекции по электродинамике, ч.2, Специальная теория относительности и электромагнитные явления, Издательский дом ВГУ, 2014 г.
3. Бижігітов Т. Электродинамика және салыстырмалықтың арнайы теориясы/ Оқулық. – Алматы: ЖШС РПБК «Дәуір», 448 б., 2012 ж.
4. Матвеев А.Н. Электродинамика и теория относительсности, Издательство: Высшая школа, Москва, 1985 г. Faraoni Valerio, Special Relativity, Springer, Switzerland, 2013 year.
5. Угаров В.А. Специальная теория относительности, Издательство: Наука, Москва, 2009 г.
6. Розман Г.А. Теория относительности, Издательство: ПГПУ, Псков, 2005 г.
7. Джексон Дж. Классическая электродинамика, Издательство: Мир, Москва, 1988 г.
8. Яковлев В.И. Классическая электродинамика: Учеб. пособие/ Но-восиб. ун-т. Новосибирск, 267 с., 2003 г.
9. Griffiths D.J. Introduction to Electrodynamics, Addison-Wesley, New Jersey, 2013 year.
10. Гречко Л.Г., Сугаков В.И., Томасевич О.Ф., Федорченко А.М. Задачи по теоретической физике, Издательство: Мир, 1997 г.