ДӘРІС 10

Төртөлшемді векторлардың мысалдары

Қауымдастырылған профессор
Уразалина Айнур Адилхановна

Дәріс мақсаты

ДӘРІСТІҢ МАҚСАТЫ: САЛЫСТЫРМАЛЫҚ ТЕОРИЯСЫНЫҢ МАТЕМАТИКАЛЫҚ АППАРАТЫН ЕНГІЗУ — 4-ВЕКТОРЛАР МЕН 4-ТЕНЗОРЛАР, КО- ЖӘНЕ КОНТРАВАРИАНТТЫ КОМПОНЕНТТЕР, МЕТРИКАЛЫҚ ТЕНЗОР, ТОЛЫҚ АНТИСИММЕТРИЯЛЫҚ ТЕНЗОР, 4-ГРАДИЕНТ ЖӘНЕ 4-ӨЛШЕМДІ ИНТЕГРАЛДАУ. КЕЛЕСІ ДӘРІСТЕРДЕГІ БАРЛЫҚ ӨРНЕКТЕР ОСЫ БЕЛГІЛЕУЛЕРМЕН ЖАЗЫЛАДЫ.

4-вектордың анықтамасы (еске түсіру)

- Оқиғаның координаттары $x^i = (ct,\ x,\ y,\ z)$ — 4-радиус-вектордың компоненттері.
- **4-вектор** деп Лоренц түрлендірулерінде x^i сияқты түрленетін төрт A^i шамасының жиынтығын айтамыз:

$$A^0 = \frac{A'^0 + \frac{V}{c}A'^1}{\sqrt{1-\frac{V^2}{c^2}}}, \quad A^1 = \frac{A'^1 + \frac{V}{c}A'^0}{\sqrt{1-\frac{V^2}{c^2}}}, \quad A^2 = A'^2,\ A^3 = A'^3 \qquad (10.1)$$

- Ковариантты компоненттер: $A_i = (A^0,\ -\mathbf{A})$; скаляр көбейтінді $A_i B^i = A^0 B^0 - \mathbf{A}\cdot\mathbf{B}$ — инвариант.
- Әр 4-вектордың квадраты $A_i A^i$ барлық ИСЖ-де бірдей. Бұл дәрістегі мысалдарда осы инварианттың мағынасына назар аударамыз.

Дәрістегі 4-векторлар

- 4-жылдамдық және 4-үдеу
- 4-импульс және 4-күш
- Толқындық 4-вектор
- 4-потенциал
- 4-ток

4-жылдамдық

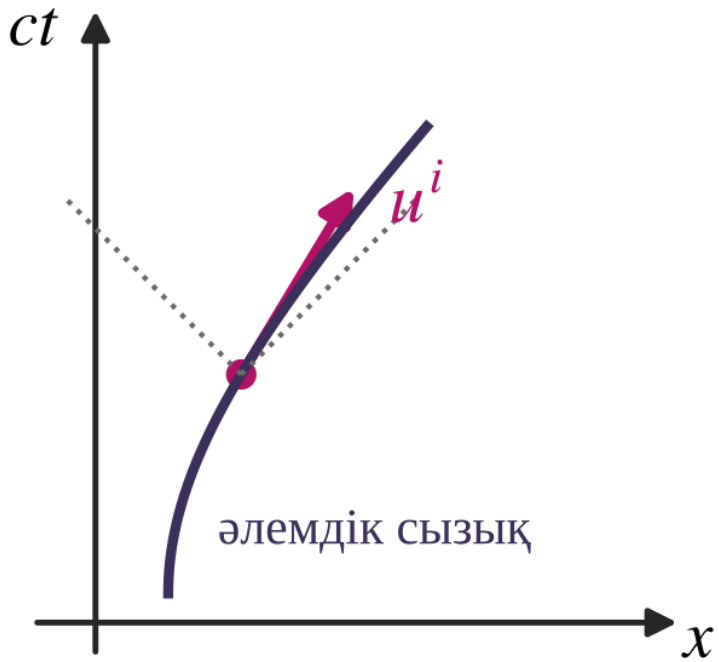
- Үшөлшемді жылдамдықтан 4-вектор құрамыз: dx^i — 4-вектор, ds — инвариант, сондықтан олардың қатынасы да 4-вектор.

$$u^i = \frac{dx^i}{ds} \qquad (10.2)$$

$ds = c\,dt\sqrt{1 - v^2/c^2}$ (5.20) болғандықтан:

$$u^i = \left(\frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}, \frac{\mathbf{v}}{c\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}\right) \qquad (10.3)$$

- 4-жылдамдық — өлшемсіз шама. Геометриялық тұрғыдан ол бөлшектің әлемдік сызығына жанама 4-вектор.



1-сурет. 4-жылдамдық әлемдік сызыққа жанама

4-жылдамдықтың нормалануы. 4-үдеу

4-жылдамдықтың компоненттері тәуелсіз емес: $dx_i dx^i = ds^2$ теңдігін ds^2-қа бөлсек:

$$u_i u^i = 1 \qquad (10.4)$$

Екінші туынды **4-үдеу** деп аталады: $w^i = \frac{d^2x^i}{ds^2} = \frac{du^i}{ds}$.

(10.4)-ті дифференциалдасақ:

$$u_i w^i = 0 \qquad (10.5)$$

4-жылдамдық пен 4-үдеу өзара ортогональ.

Меншікті жүйеде (қосымша)

Бөлшек берілген сәтте тыныштықта тұрған жүйеде ($v = 0$):

$$u^i = (1,\ 0,\ 0,\ 0), \qquad w^i = \left(0,\ \frac{\mathbf{w}}{c^2}\right)$$

w — кәдімгі үшөлшемді үдеу. (10.5) бұл жүйеде айқын: $u^0 w^0 = 0$.

4-үдеудің квадраты — инвариант:

$$w_i w^i = -\frac{w^2}{c^4}$$

Ол меншікті үдеудің шамасын кез келген ИСЖ-де анықтайды.

Мысал: бірқалыпты үдемелі қозғалыс

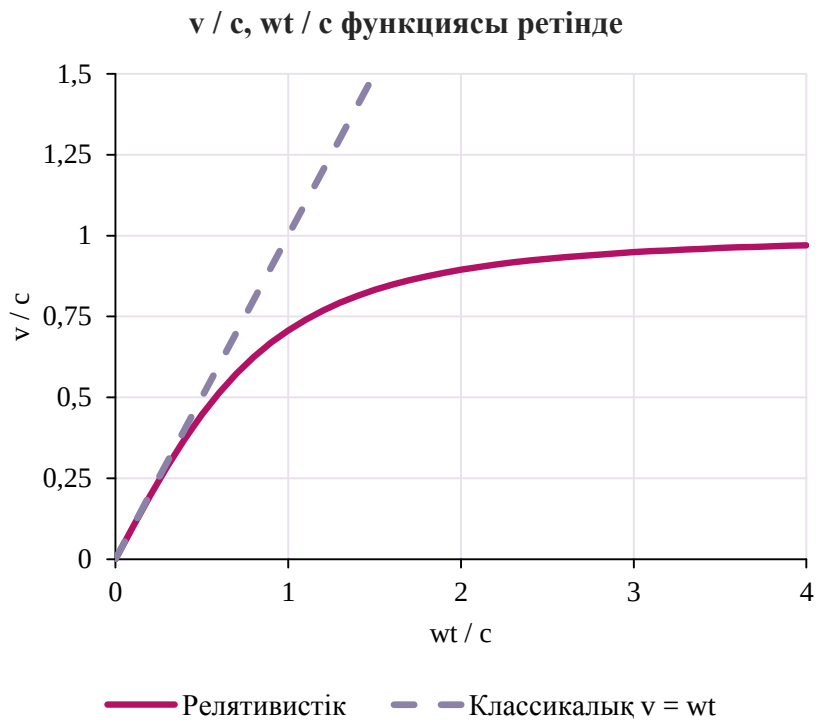
- Есеп: меншікті санақ жүйесінде үдеуінің шамасы w тұрақты болатын түзу сызықты қозғалысты табу.
- Шарт инвариант түрде: $w_i w^i = -w^2/c^4 = const$. K жүйесінде ашсақ:

$$\frac{d}{dt}\frac{v}{\sqrt{1-v^2/c^2}} = w \quad \Rightarrow \quad \frac{v}{\sqrt{1-v^2/c^2}} = wt$$

$t = 0$ кезінде $v = 0$, $x = 0$ деп алып, интегралдаймыз:

$$v = \frac{wt}{\sqrt{1+\frac{w^2t^2}{c^2}}}, \qquad x = \frac{c^2}{w}\left(\sqrt{1+\frac{w^2t^2}{c^2}} - 1\right)$$

$wt \ll c$: $v = wt$, $x = wt^2/2$ (классикалық); $wt \to \infty$: $v \to c$.



2-сурет. График кітапта жоқ; жылдамдық c-дан аспайды

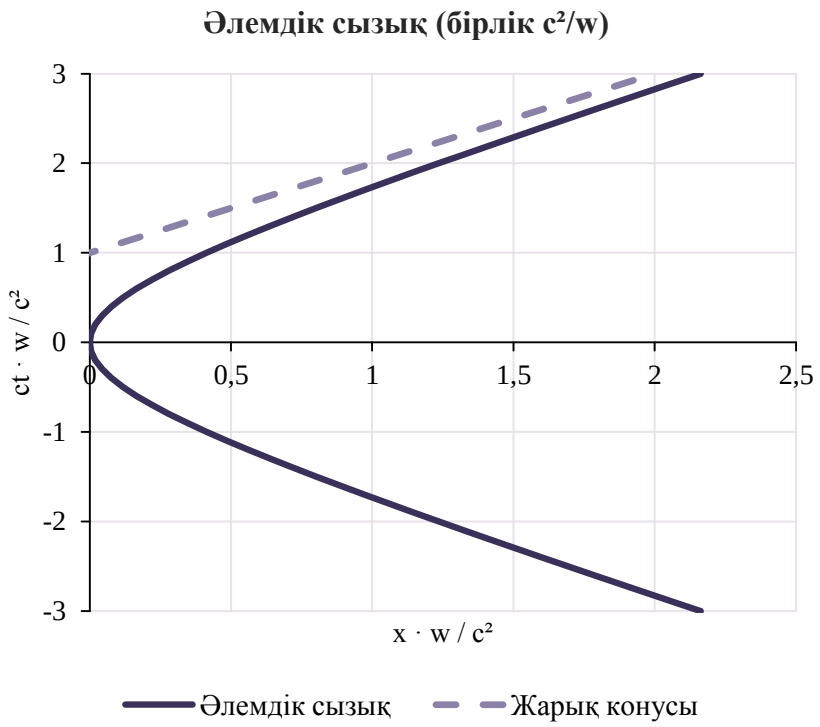
Біркалыпты үдемелі қозғалыс: әлемдік сызық және меншікті уақыт

- 5-слайдтағы $x(t)$ өрнегінен $\left(x+\frac{c^2}{w}\right)^2 - c^2t^2 = \frac{c^4}{w^2}$: әлемдік сызық — **гипербола**.

Меншікті уақыт:

$$\tau = \int_0^t \sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}\,dt = \frac{c}{w}\operatorname{arsh}\frac{wt}{c}$$

- $t \to \infty$ кезінде $\tau \approx \frac{c}{w}\ln\frac{2wt}{c}$: меншікті уақыт t-дан әлдеқайда баяу өседі.
- үдемелі қозғалатын сағат инерциалдық сағаттан қалып қояды.



3-сурет. Сызық асимптотаға (жарық сәулесіне) жақындайды; график кітапта жоқ

4-импульс

4-жылдамдықты mc инвариантына көбейтсек, 4-импульс шығады (8-дәріс):

$$p^i = mc\,u^i \qquad (10.7)$$

$$p^i = \left(\frac{E}{c},\ \mathbf{p}\right) \qquad (10.6)$$

(10.4)-тен оның квадраты:

$$p_i p^i = \frac{E^2}{c^2} - p^2 = m^2 c^2 \qquad (10.8)$$

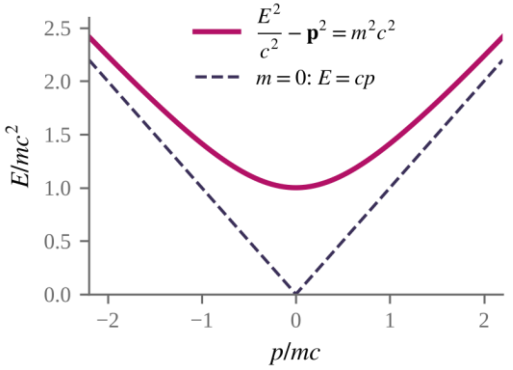
- Энергия мен импульс — бір 4-вектордың компоненттері; бір ИСЖ-нен екіншісіне өткенде олар (10.1) бойынша араласады (8.15).
- Инвариант — бөлшектің массасы. Массасыз бөлшек үшін $p_i p^i = 0$, $p = E/c$.

Мысал (қосымша)

Екі бөлшектің толық 4-импульсі $P^i = p_1^i + p_2^i$ де 4-вектор. Оның квадраты:

$$P_i P^i = \frac{(E_1 + E_2)^2}{c^2} - (\mathbf{p}_1 + \mathbf{p}_2)^2$$

Бұл — жүйенің массасының квадраты M^2c^2 (8-дәрістің 4-слайды). Ол барлық ИСС-те бірдей, сондықтан массалар центрі жүйесінде есептеуге болады.



4-күш

Үшөлшемді $\mathbf{f} = d\mathbf{p}/dt$ анықтамасына ұқсас, 4-күш — 4-импульстің s бойынша туындысы:

$$g^i = \frac{dp^i}{ds} = mc\,\frac{du^i}{ds} \qquad (10.9)$$

$$g^i = \left(\frac{\mathbf{f}\cdot\mathbf{v}}{c^2\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}},\ \frac{\mathbf{f}}{c\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} \right) \qquad (10.10)$$

- 4-күш 4-үдеуге пропорционал: $g^i = mc\,w^i$. Сондықтан (10.5) бойынша $g_i u^i = 0$ — оның төрт компоненті тәуелсіз емес.
- Уақыттық компоненті $\mathbf{f}\cdot\mathbf{v}$ — күштің бірлік уақыттағы жұмысына пропорционал: энергияның өзгерісі 4-күштің бір бөлігі.
- Мысал: электромагниттік өрісте $g_i = \frac{e}{c}F_{ik}u^k$ (13-дәріс, (13.4)); оның кеңістіктік бөлігі Лоренц күшін береді.

Толқындық 4-вектор

Монохроматты жазық толқында өріс $e^{i(\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}-\omega t)}$ түрінде тәуелді; $\mathbf{k}=\frac{\omega}{c}\mathbf{n}$ — толқындық вектор (кітапта (48,4)).

$$k^i=\left(\frac{\omega}{c},\ \mathbf{k}\right) \qquad (10.11)$$

Бұл шамалардың 4-вектор екені олардың x^i-ге көбейтіндісі — толқынның фазасы — скаляр екенінен көрінеді:

$$k_i x^i=\omega t-\mathbf{k}\cdot\mathbf{r} \qquad (10.12)$$

$$k_i k^i=0 \qquad (10.13)$$

- Фаза — толқынның «санағы» (неше толқын өтті); оны барлық бақылаушы бірдей санайды.
- $k_i k^i=0$: толқындық 4-вектор жарықұқсас — массасыз бөлшектің 4-импульсі сияқты.

4-импульспен ұқсастық

Массасыз бөлшек үшін $p_i p^i=0$, ал толқын үшін $k_i k^i=0$.

Екеуі де бір ереже (10.1) бойынша түрленеді. Сондықтан бөлшек–толқын сәйкестігі (кванттық механикада $p^i=\hbar k^i$) Лоренц түрлендірулерімен үйлесімді.

(Кванттық байланыс кітаптың бұл бөлімінде жоқ, тек салыстыру үшін.)

Толқындық 4-вектордың қолданылуы: Доплер эффектісі

- Көз K_0 жүйесінде тыныштықта, ω_0 жиілікпен шығарады; K_0 жүйесі K-ға қатысты V жылдамдықпен қозғалады.
- $k^0 = \omega/c$, $k^1 = \frac{\omega}{c}\cos\alpha$ (α — шығару бағыты мен V арасындағы бұрыш, K-да) қойсақ:

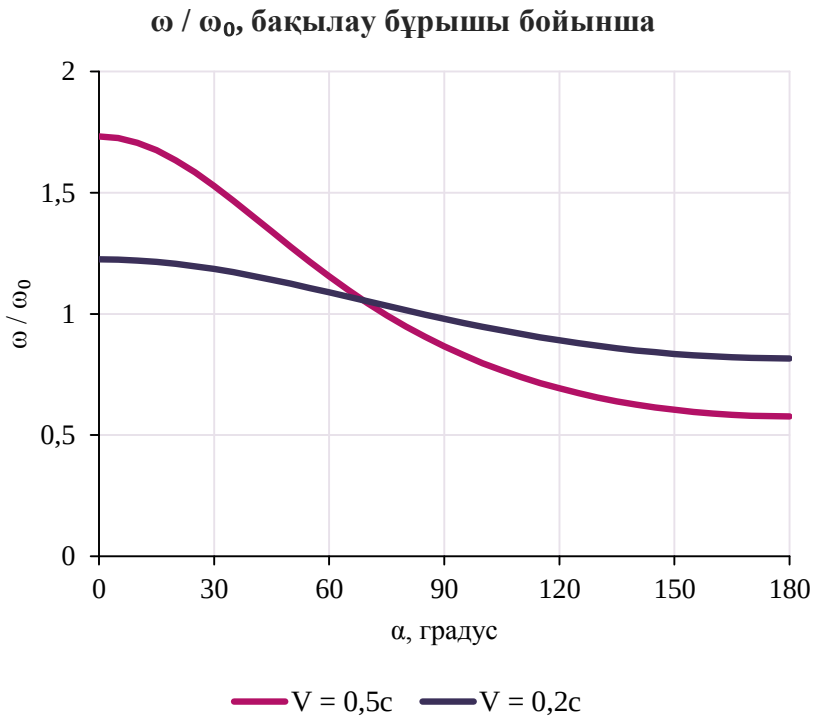
$$\omega = \omega_0 \frac{\sqrt{1-\frac{V^2}{c^2}}}{1-\frac{V}{c}\cos\alpha} \qquad (10.14)$$

$V \ll c$ (егер α бұрышы $\pi/2$-ге тым жақын болмаса):

$$\omega \approx \omega_0\left(1+\frac{V}{c}\cos\alpha\right) \qquad (10.15)$$

$$\omega = \omega_0\left(1-\frac{V^2}{2c^2}\right) \qquad (10.16)$$

$\alpha = \pi/2$ кезінде (көлденең эффект) өзгеріс V^2/c^2 ретті — классикалық теорияда жоқ, уақыттың баяулауының салдары.



4-сурет. (10.14) бойынша есептелді; график кітапта жоқ

Электродинамикадағы 4-векторлар (шолу)

Келесі дәрістерде толық қарастырылатын екі 4-вектор:

$$A^i = (\varphi,\ \mathbf{A})$$

- **4-потенциал**: скаляр және векторлық потенциалдар бір 4-вектордың компоненттері.
- Ол зарядтың әсеріне $-\frac{e}{c}A_i dx^i$ скаляры түрінде кіреді — сондықтан A_i 4-вектор болуы керек.
- Толығырақ — 12-дәрісте.

$$j^i = (c\rho,\ \mathbf{j}), \qquad \mathbf{j} = \rho\mathbf{v}$$

- **4-ток**: заряд тығыздығы мен ток тығыздығы бір 4-вектордың компоненттері.
- Заряд — инвариант, $de\ dx^i = \rho\, dV\, dt\, \frac{dx^i}{dt}$, ал $dV\, dt$ — скаляр; демек $\rho\, dx^i/dt$ — 4-вектор.
- Толығырақ — 11-дәрісте.

4-векторлар: жиынтық кесте

Шама	Компоненттер	Инвариант / қатынас
4-радиус-вектор	$x^i = (ct,\ \mathbf{r})$	$x_i x^i = s^2$
4-жылдамдық	$u^i = (\gamma,\ \gamma\mathbf{v}/c)$	$u_i u^i = 1$
4-үдеу	$w^i = du^i/ds$	$u_i w^i = 0$
4-импульс	$p^i = (E/c,\ \mathbf{p})$	$p_i p^i = m^2 c^2$
Толқындық 4-вектор	$k^i = (\omega/c,\ \mathbf{k})$	$k_i k^i = 0$
4-потенциал	$A^i = (\varphi,\ \mathbf{A})$	—
4-ток	$j^i = (c\rho,\ \mathbf{j})$	$\partial j^i/\partial x^i = 0$

$\gamma = 1/\sqrt{1 - v^2/c^2}$ — ықшам белгілеу (кітапта қолданылмайды).

Қорытынды

- 4-вектор — x^i сияқты түрленетін төрт шама; оның квадраты инвариант.
- 4-жылдамдық $u^i = dx^i/ds$ әлемдік сызыққа жанама, $u_i u^i = 1$; 4-үдеу оған ортогональ.
- Бірқалыпты үдемелі қозғалыс: әлемдік сызық — гипербола, $v \to c$, меншікті уақыт логарифм бойынша өседі.
- 4-импульс $p^i = (E/c, \mathbf{p})$, инварианты — масса; 4-күш $g^i = dp^i/ds$.
- Толқындық 4-вектор $k^i = (\omega/c, \mathbf{k})$ Доплер эффектісін береді; 4-потенциал мен 4-ток — электродинамикада.

Негізгі формулалар

$$u_i u^i = 1, \quad u_i w^i = 0$$

$$p_i p^i = m^2 c^2$$

$$k_i k^i = 0$$

Пайдаланылған әдебиеттер

1. Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М. Теориялық физика. II том: Өріс теориясы: оқулық / ауд. Т.Ә. Қожамқұлов, Н. Қойшыбаев. – Алматы: Қазақ университеті, 2009. – 563 б. – ISBN 9965-30-772-5.
2. Мармо С.И., Фролов М.В. Лекции по электродинамике, ч.2, Специальная теория относительности и электромагнитные явления, Издательский дом ВГУ, 2014 г.
3. Бижігітов Т. Электродинамика және салыстырмалықтың арнайы теориясы/ Оқулық. – Алматы: ЖШС РПБК «Дәуір», 448 б., 2012 ж.
4. Матвеев А.Н. Электродинамика и теория относительсности, Издательство: Высшая школа, Москва, 1985 г. Faraoni Valerio, Special Relativity, Springer, Switzerland, 2013 year.
5. Угаров В.А. Специальная теория относительности, Издательство: Наука, Москва, 2009 г.
6. Розман Г.А. Теория относительности, Издательство: ПГПУ, Псков, 2005 г.
7. Джексон Дж. Классическая электродинамика, Издательство: Мир, Москва, 1988 г.
8. Яковлев В.И. Классическая электродинамика: Учеб. пособие/ Но-восиб. ун-т. Новосибирск, 267 с., 2003 г.
9. Griffiths D.J. Introduction to Electrodynamics, Addison-Wesley, New Jersey, 2013 year.
10. Гречко Л.Г., Сугаков В.И., Томасевич О.Ф., Федорченко А.М. Задачи по теоретической физике, Издательство: Мир, 1997 г.