ДӘРІС 7

Еркін бөлшектің Лагранж және Гамильтон функциялары

Қауымдастырылған профессор
Уразалина Айнур Адилхановна

Дәріс мақсаты

ДӘРІСТІҢ МАҚСАТЫ: ЕҢ КІШІ ӘСЕР ПРИНЦИПІ МЕН ЛОРЕНЦ ИНВАРИАНТТЫЛЫҒЫ ТАЛАПТАРЫНАН ЕРКІН БӨЛШЕКТІҢ ӘСЕРІН, ЛАГРАНЖ ФУНКЦИЯСЫН, ИМПУЛЬСІН ЖӘНЕ ГАМИЛЬТОН ФУНКЦИЯСЫН ҚОРЫТЫП ШЫҒАРУ. СУРЕТТЕ: А ЖӘНЕ В ӘЛЕМДІК НҮКТЕЛЕРІН ҚОСАТЫН НАҒЫЗ (ТҮЗУ) ӘЛЕМДІК СЫЗЫҚ ЖӘНЕ ОҒАН ЖАҚЫН «САЛЫСТЫРМАЛЫ» СЫЗЫҚТАР.

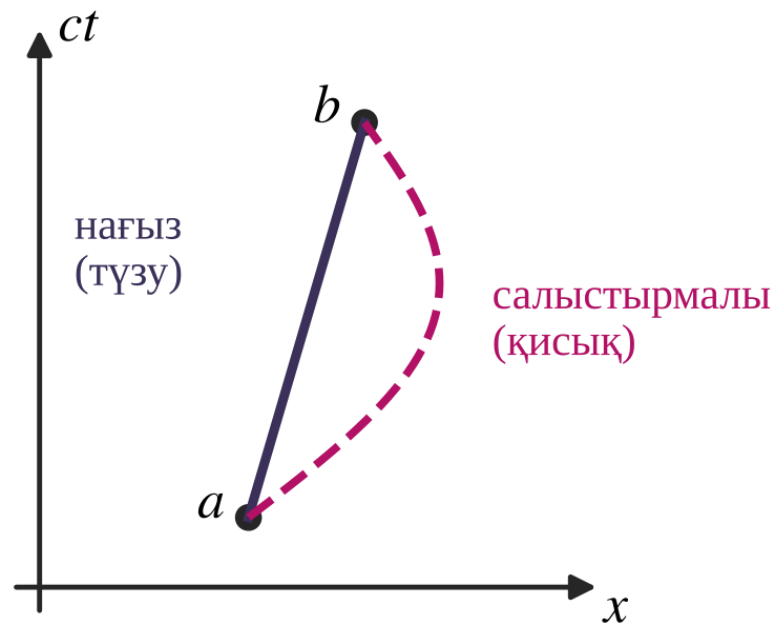
Ең кіші әсер принципі

- Әрбір механикалық жүйе үшін **әсер** деп аталатын S интегралы бар; нағыз қозғалыс үшін ол минимум болады.
- Демек, нағыз қозғалыс үшін әсердің вариациясы нөлге тең:

$$\delta S = 0$$

Дәлірек айтсақ

Ландаудың ескертуі бойынша: S интегралы тек интегралдау сызығының **жеткілікті кіші** бөліктерінде минимал болады. Кез келген ұзындықтағы сызық үшін тек **экстремум** туралы айтуға болады, ол міндетті түрде минимум емес.



1-сурет. Нағыз (түзу) және салыстырмалы (қисық) әлемдік сызықтар

Еркін бөлшектің әсеріне қойылатын талаптар

1 **Инварианттылық**

Әсер санақ жүйесін таңдауға тәуелсіз, яғни Лоренц түрлендірулеріне қатысты инвариант болуы тиіс. Сондықтан ол **скалярдан** алынуы керек.

2 **Бірінші ретті дифференциалдар**

Интеграл астында **бірінші дәрежелі** дифференциалдар тұруы тиіс: интеграл әлемдік сызық бойымен алынады.

3 **Жалғыз мүмкіндік**

Еркін бөлшек үшін құруға болатын жалғыз скаляр — интервал ds немесе $\alpha\, ds$, мұндағы α — тұрақты.

Демек, еркін бөлшектің әсері:

a, b — берілген екі әлемдік нүкте (оқиға)

$$S = -\alpha \int_a^b d\, s$$

α — бөлшекті сипаттайтын тұрақты

Тұрақтының таңбасы: $\alpha > 0$

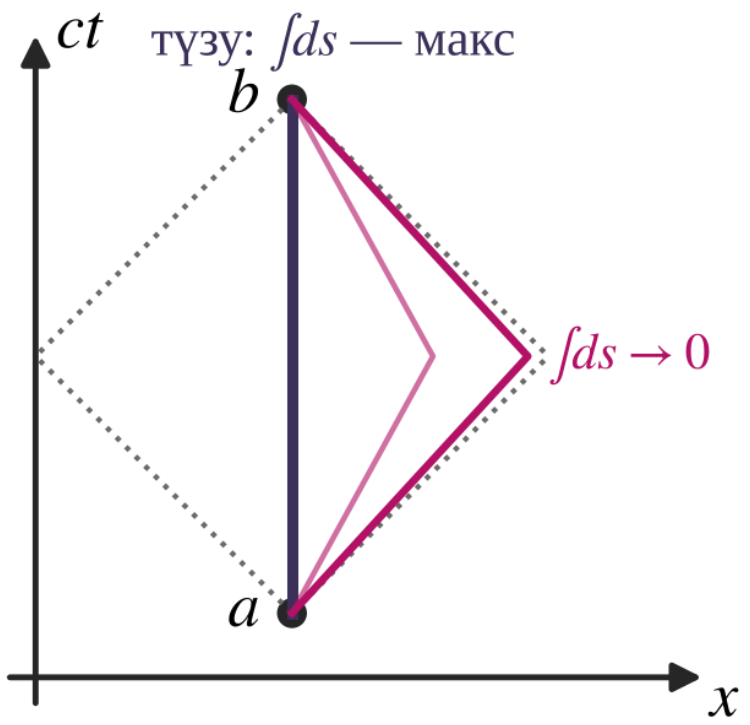
- $\int_a^b d\,s$ интегралы **түзу** әлемдік сызық бойында **максимал** (қозғалмайтын сағат ең көп уақыт көрсетеді).
- Қисық әлемдік сызық бойымен оны қалағанымызша кішірейте аламыз (жарық конусына жақындатып).

Қорытынды

$+\alpha\int ds$ $(\alpha > 0)$ — **минимумы жоқ**: оны шексіз кішірейтуге болады.

$-\alpha\int ds$ — түзу әлемдік сызық бойында **минимум.**

Сондықтан минус таңбасымен алынады және барлық бөлшектер үшін $\alpha > 0$.



2-сурет. Сынық сызық жарық конусына жақындаған сайын ∫ds → 0

Лагранж функциясына өту

Әсерді уақыт бойынша интеграл түрінде жазамыз; dt-ның алдындағы коэффициент — Лагранж функциясы L:

$$S = \int_{t_1}^{t_2} L\, dt$$

Интервалды бөлшек жылдамдығы арқылы өрнектейміз (меншікті уақыт, (5.20)):

$$ds = \sqrt{c^2 dt^2 - dx^2 - dy^2 - dz^2} = c\, dt \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}, \qquad v^2 = \frac{dx^2 + dy^2 + dz^2}{dt^2}$$

Демек:

$$S = -\int_{t_1}^{t_2} \alpha\, c \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}\, dt \qquad \Rightarrow \qquad L = -\alpha c \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}$$

Тұрақтыны анықтау: $\alpha = mc$

$c \to \infty$ шегінде L классикалық $L = \frac{mv^2}{2}$ өрнекке өтуі тиіс. v/c дәрежелері бойынша жіктейміз:

$$L = -\alpha c \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} \approx -\alpha c + \frac{\alpha v^2}{2c}$$

1-қадам

Тұрақты мүше $-\alpha c$ қозғалыс теңдеулеріне әсер етпейді — оны тастаймыз.

2-қадам

$\frac{\alpha v^2}{2c}$ мүшесін $\frac{mv^2}{2}$-мен салыстырамыз:

$$\frac{\alpha}{c} = m \;\Rightarrow\; \alpha = mc$$

Тексеру

Өлшемділік: $[\alpha\, ds] = [mc] \cdot [см] = [эрг \cdot с]$ — әсердің өлшемділігі.

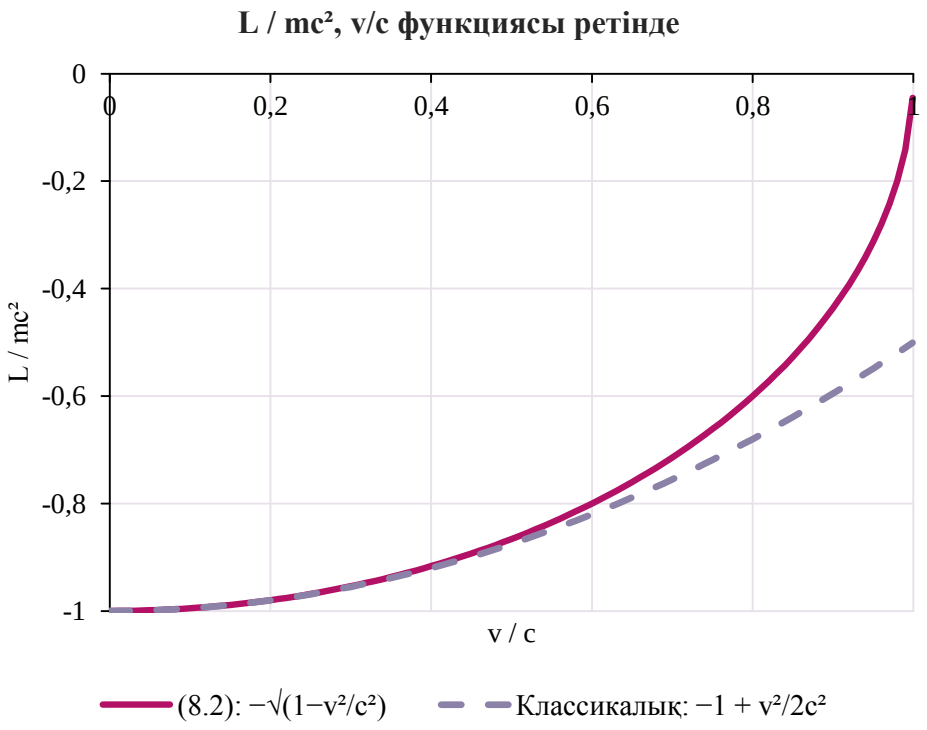
$\alpha > 0$ шарты $m > 0$ болуымен келіседі.

Нәтиже: әсер және Лагранж функциясы

$$S = -mc\int_a^b d\,s \qquad (7.1)$$

$$L = -mc^2\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}} \qquad (7.2)$$

- S бөлшектің меншікті уақытына пропорционал: $S = -mc^2\int d\tau$ (қосымша түрі).
- L тек v шамасына тәуелді; $v \to c$ кезінде $L \to 0$.
- $v \ll c$: $L \approx -mc^2 + \frac{mv^2}{2}$.



3-сурет. Кіші v кезінде қисықтар беттеседі; график кітапта жоқ

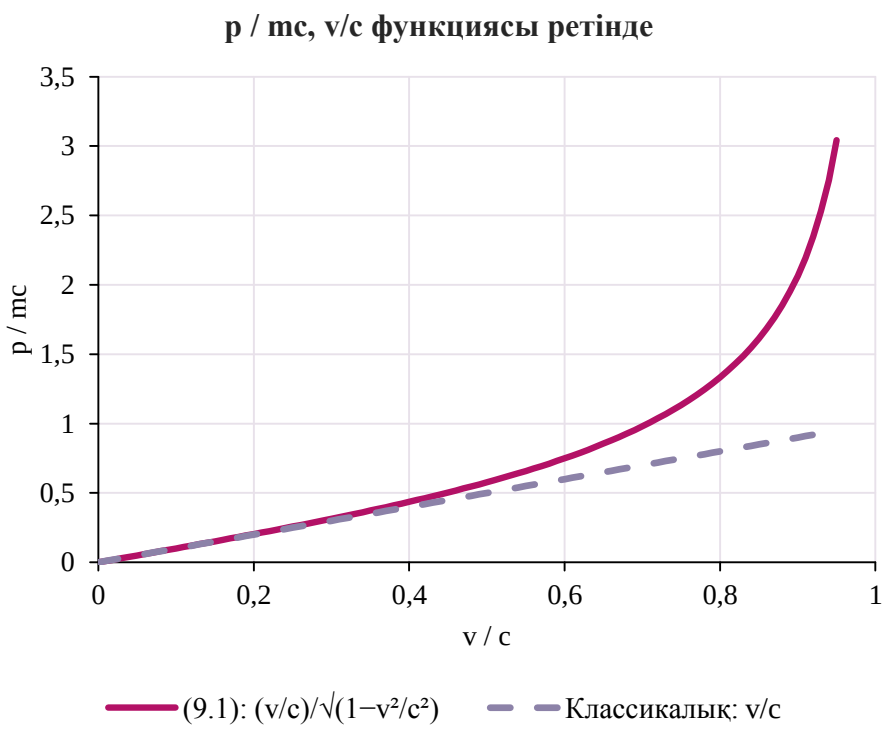
Импульс

Импульс — L-дың жылдамдық бойынша туындысы (вектор): $\mathbf{p} = \partial L / \partial \mathbf{v}$.

$$\frac{\partial L}{\partial \mathbf{v}} = -mc^2 \cdot \frac{1}{2}\left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)^{-1/2} \cdot \left(-\frac{2\mathbf{v}}{c^2}\right)$$

$$\mathbf{p} = \frac{m\mathbf{v}}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \qquad (7.3)$$

- $v \ll c$ немесе $c \to \infty$: $\mathbf{p} = m\mathbf{v}$ — классикалық өрнек.
- $v \to c$ кезінде импульс шексіздікке ұмтылады.
- $\mathbf{p} \parallel \mathbf{v}$; $\partial v / \partial \mathbf{v} = \mathbf{v}/v$ ескерілді.



Энергия және Гамильтон функциясы

Механикадағы анықтама бойынша энергия $E = \mathbf{p} \cdot \mathbf{v} - L$. (7.2) мен (7.3)-ді қойсақ:

$$E = \frac{mv^2}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} + mc^2\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}} = \frac{mc^2}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} \qquad (7.4)$$

(7.3) мен (7.4)-ті квадраттап салыстырсақ, v жойылады:

$$\frac{E^2}{c^2} - p^2 = \frac{m^2c^2 - m^2v^2}{1-\frac{v^2}{c^2}} = m^2c^2$$

$$\frac{E^2}{c^2} = p^2 + m^2c^2 \qquad (7.5)$$

Гамильтон функциясы — импульс арқылы өрнектелген энергия:

$$\mathcal{H} = c\sqrt{p^2 + m^2c^2} \qquad (7.6)$$

Назар аударыңыз

$v = 0$ кезінде $E = mc^2 \neq 0$. Энергияның толық талдауы — 8-дәрісте.

Классикалық шек және Гамильтон теңдеулері

$p \ll mc$ болғанда (7.6)-ны жіктейміз:

$$\mathcal{H} = mc^2\sqrt{1+\frac{p^2}{m^2c^2}} \approx mc^2 + \frac{p^2}{2m}$$

Тыныштық энергиясын mc^2 алып тастасақ — классикалық $\mathcal{H} = p^2/2m$ шығады.

Неге тұрақты маңызды емес?

Гамильтон функциясына (Лагранж функциясына да) тұрақты қосу қозғалыс теңдеулерін өзгертпейді. Бірақ релятивистік механикада энергияның өзі осы тұрақтымен бірге анықталған (8-дәріс).

Тексеру: Гамильтон теңдеулері

(қосымша, кітапта жоқ)

Жылдамдық:

$$\dot{\mathbf{r}} = \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \mathbf{p}} = \frac{c\,\mathbf{p}}{\sqrt{p^2+m^2c^2}} = \frac{c^2\mathbf{p}}{E}$$

(7.3), (7.4)-пен үйлесімді: $\mathbf{p} = E\mathbf{v}/c^2$.

Импульс:

$$\dot{\mathbf{p}} = -\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \mathbf{r}} = 0$$

Еркін бөлшек түзу сызықты бірқалыпты қозғалады.

Қорытынды

- Әсер Лоренц инварианты болуы тиіс; еркін бөлшек үшін жалғыз мүмкіндік — $S = -mc\int ds$ (7.1).
- Минус таңбасы мен $\alpha > 0$ — түзу әлемдік сызықтағы $\int ds$ максимумының салдары.
- $\alpha = mc$ классикалық шекпен сәйкестіктен анықталады.
- Лагранж функциясы $L = -mc^2\sqrt{1 - v^2/c^2}$ (7.2), импульс (7.3).
- Гамильтон функциясы $\mathcal{H} = c\sqrt{p^2 + m^2c^2}$ (7.6); $p \ll mc$ шегінде $mc^2 + p^2/2m$.

Негізгі формулалар

$$S = -mc\int_a^b d\,s$$

$$L = -mc^2\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}$$

$$\mathcal{H} = c\sqrt{p^2 + m^2c^2}$$

Пайдаланылған әдебиеттер

1. Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М. Теориялық физика. II том: Өріс теориясы: оқулық / ауд. Т.Ә. Қожамқұлов, Н. Қойшыбаев. – Алматы: Қазақ университеті, 2009. – 563 б. – ISBN 9965-30-772-5.
2. Мармо С.И., Фролов М.В. Лекции по электродинамике, ч.2, Специальная теория относительности и электромагнитные явления, Издательский дом ВГУ, 2014 г.
3. Бижігітов Т. Электродинамика және салыстырмалықтың арнайы теориясы/ Оқулық. – Алматы: ЖШС РПБК «Дәуір», 448 б., 2012 ж.
4. Матвеев А.Н. Электродинамика и теория относительсности, Издательство: Высшая школа, Москва, 1985 г. Faraoni Valerio, Special Relativity, Springer, Switzerland, 2013 year.
5. Угаров В.А. Специальная теория относительности, Издательство: Наука, Москва, 2009 г.
6. Розман Г.А. Теория относительности, Издательство: ПГПУ, Псков, 2005 г.
7. Джексон Дж. Классическая электродинамика, Издательство: Мир, Москва, 1988 г.
8. Яковлев В.И. Классическая электродинамика: Учеб. пособие/ Но-восиб. ун-т. Новосибирск, 267 с., 2003 г.
9. Griffiths D.J. Introduction to Electrodynamics, Addison-Wesley, New Jersey, 2013 year.
10. Гречко Л.Г., Сугаков В.И., Томасевич О.Ф., Федорченко А.М. Задачи по теоретической физике, Издательство: Мир, 1997 г.