Дәріс 2

Векторлар және метрика

Қауымдастырылған профессор
Уразалина Айнур Адилхановна

Дәріс мақсаты

Дәрістің мақсаты: гравитациялық өрісті зерттеу үшін кез келген (қисық сызықты) координаттарға икемделген 4-өлшемді векторлық аппаратты енгізу: контравариантты және ковариантты векторлар, метрикалық тензор, индекстерді көтеру мен түсіру.

Метрикалық тензордан нақты (өлшенетін) шамаларды алу: меншікті уақыт, кеңістіктік қашықтық, үшөлшемді метрикалық тензор $\gamma_{\alpha\beta}$, сағаттарды синхрондау.

Нәтижелерді айналмалы санақ жүйесінде қолданып, 1-дәрістегі айналмалы диск есебін сандық түрде аяқтау.

Дәріс жоспары

- Координаттарды түрлендіру
- Контравариантты және ковариантты векторлар
- Скаляр көбейтінді, метрикалық тензор
- Индекстерді көтеру және түсіру
- Меншікті уақыт, $g_{00} > 0$
- Радиолокациялық әдіс
- Кеңістіктік метрика $\gamma_{\alpha\beta}$
- Мысал: айналмалы жүйе
- Сағаттарды синхрондау

Қисық сызықты координаттардағы векторлар

x^i координаттарынан x'^i координаттарына түрлендіру $x^i = f^i(x'^0, x'^1, x'^2, x'^3)$ кезінде дифференциалдар былай түрленеді:

$$dx^i = \frac{\partial x^i}{\partial x'^k} dx'^k \qquad (2.1)$$

Контравариантты 4-вектор — дифференциалдар сияқты түрленетін төрт A^i шамасы:

$$A^i = \frac{\partial x^i}{\partial x'^k} A'^k \qquad (2.2)$$

φ скалярының туындылары $\frac{\partial \varphi}{\partial x^i} = \frac{\partial \varphi}{\partial x'^k}\frac{\partial x'^k}{\partial x^i}$ (2.3) сияқты түрленетін шамалар — **ковариантты 4-вектор**:

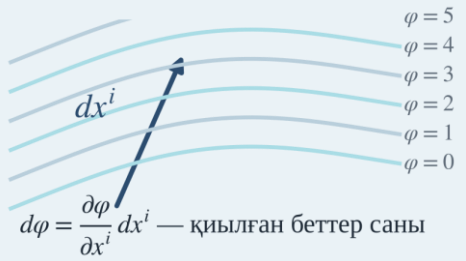
$$A_i = \frac{\partial x'^k}{\partial x^i} A'_k \qquad (2.4)$$

Галилейлік жағдаймен байланыс

Бұл анықтамалар 4-векторлар анықтамасының табиғи жалпылamасы: dx^i — контравариантты, $\partial\varphi/\partial x^i$ — ковариантты.

Галилейлік жүйеде x^i координаттарының өздері де 4-вектор құрайды; қисық сызықты координаттарда тек олардың дифференциалдары ғана вектор.

Түрлендіру коэффициенттері $\partial x^i/\partial x'^k$ координаттарға тәуелді: әр нүктеде векторлар әр түрлі түрленеді.



Скаляр көбейтінді және метрикалық тензор

Екі вектордың скаляр көбейтіндісі инвариант:

$$A^i B_i = \frac{\partial x^i}{\partial x'^l}\frac{\partial x'^m}{\partial x^i} A'^l B'_m = \frac{\partial x'^m}{\partial x'^l} A'^l B'_m = A'^l B'_l$$

Ұзындық элементінің квадраты — dx^i дифференциалдарының квадраттық формасы:

$$ds^2 = g_{ik}\, dx^i dx^k, \qquad g_{ik} = g_{ki} \qquad (2.8)–(2.9)$$

g_{ik}-ның $dx^i dx^k$ контравариантты тензорымен жинақталған көбейтіндісі скаляр, сондықтан g_{ik} — ковариантты тензор: **метрикалық тензор**. Оған кері тензор g^{ik}:

$$g^{ik} g_{kl} = \delta^i_l \qquad (2.10)$$

Бірлік тензор

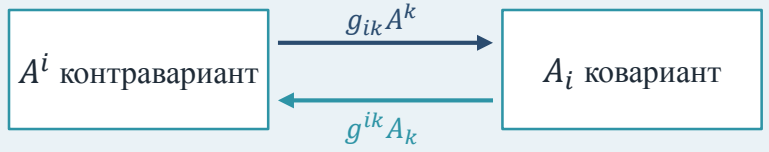
δ^i_k: $i = k$ болғанда 1, $i \neq k$ болғанда 0. Оның анықтамасы қисық сызықты координаттарда да өзгермейді.

Оның тензор екені мына теңдіктен көрінеді:

$$A^k \delta^i_k = A^i$$

Екі тензор $A_{ik} B^{kl} = \delta^l_i$ болса, олар өзара кері деп аталады.

Жалпы жағдайда барлығы 10 тәуелсіз g_{ik} — олар 4 координаттың функциялары.



Индекстерді көтеру және түсіру

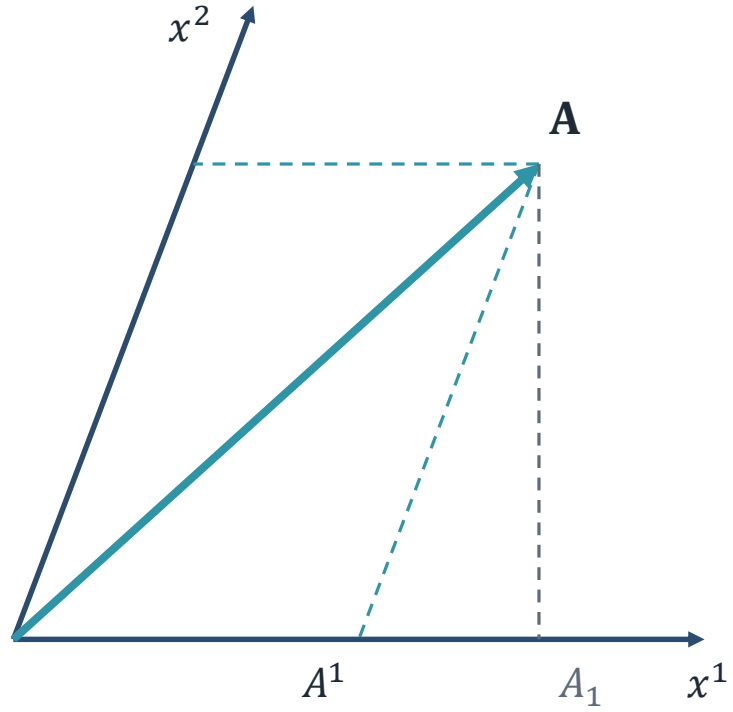
Бір физикалық векторды контра- және ковариантты компоненттермен беруге болады; оларды тек метрикалық тензор байланыстырады:

$$A^i = g^{ik} A_k, \qquad A_i = g_{ik} A^k \tag{2.11}$$

Галилейлік координаттарда:

$$g_{ik} = g^{ik} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \tag{2.12}$$

- Сонда $A^0 = A_0$, $A^\alpha = -A_\alpha$ — белгілі байланыс.
- Тензорлар үшін де дәл солай: $A^i_k = g^{il} A_{lk}$, $A^{ik} = g^{il} g^{km} A_{lm}$.
- Скаляр көбейтінді: $A^i B_i = g_{ik} A^i B^k = g^{ik} A_i B_k$.



1-сурет. Қиғаш осьтерде: контравариантты компоненттер — осьтерге параллель құраушылар, ковариантты — перпендикуляр проекцияларға пропорционал.

Нақты уақыт пен қашықтық: есептің қойылуы

ЖСТ-да санақ жүйесін таңдауға шектеу жоқ: x^1, x^2, x^3 ретінде денелердің орнын анықтайтын кез келген шамаларды, x^0 ретінде кез келген түрде жүретін сағаттардың көрсетуін алуға болады. Сондықтан сұрақ туады: **координаттар мәндерінен нақты қашықтықтар мен уақыт аралықтарын қалай табамыз?**

Интервалды кеңістіктік және уақыттық бөліктерге жіктейміз:

$$ds^2 = g_{\alpha\beta}dx^\alpha dx^\beta + 2g_{0\alpha}dx^0 dx^\alpha + g_{00}(dx^0)^2 \qquad (2.16)$$

- Латын индекстері i, k, ... 0,1,2,3 мәндерін, грек индекстері α, β, ... тек 1,2,3 мәндерін қабылдайды; екі рет қайталанған индекс бойынша қосынды алынады.
- g_{00} уақыттың өтуін, $g_{0\alpha}$ уақыт пен кеңістіктің «араласуын», $g_{\alpha\beta}$ кеңістіктік бөлікті сипаттайды.
- АСТ-да $dx^0 = 0$ деп қойып қашықтық алынатын; ЖСТ-да бұлай жасауға болмайды.

Меншікті уақыт

Кеңістіктің **бір нүктесінде** өтетін екі шексіз жуық оқиғаны алайық: $dx^1 = dx^2 = dx^3 = 0$. Онда интервал $ds = c\,d\tau$, мұндағы $d\tau$ — осы нүктедегі нақты (меншікті) уақыт:

$$ds^2 = c^2 d\tau^2 = g_{00}(dx^0)^2$$

$$d\tau = \frac{1}{c}\sqrt{g_{00}}\,dx^0 \qquad (2.13)$$

$$\tau = \frac{1}{c}\int \sqrt{g_{00}}\,dx^0 \qquad (2.14)$$

Бұл өрнектер x^0 өзгерісі бойынша нақты уақытты береді. Нақты уақыт оң болуы үшін:

$$g_{00} > 0 \qquad (2.15)$$

Шарттың мағынасы

(2.15) — сигнатура шартынан (1 дәріс, $+\,-\,-\,-$) өзгеше талап.

Сигнатура кез келген нақты кеңістік-уақытта орындалуы тиіс.

$g_{00} > 0$ бұзылса, бұл тек санақ жүйесін нақты денелермен іске асыруға болмайтынын білдіреді; координаттарды түрлендіріп оны түзетуге болады.

Мысал — айналмалы жүйе:

$$g_{00} = 1 - \frac{\Omega^2 r^2}{c^2}$$

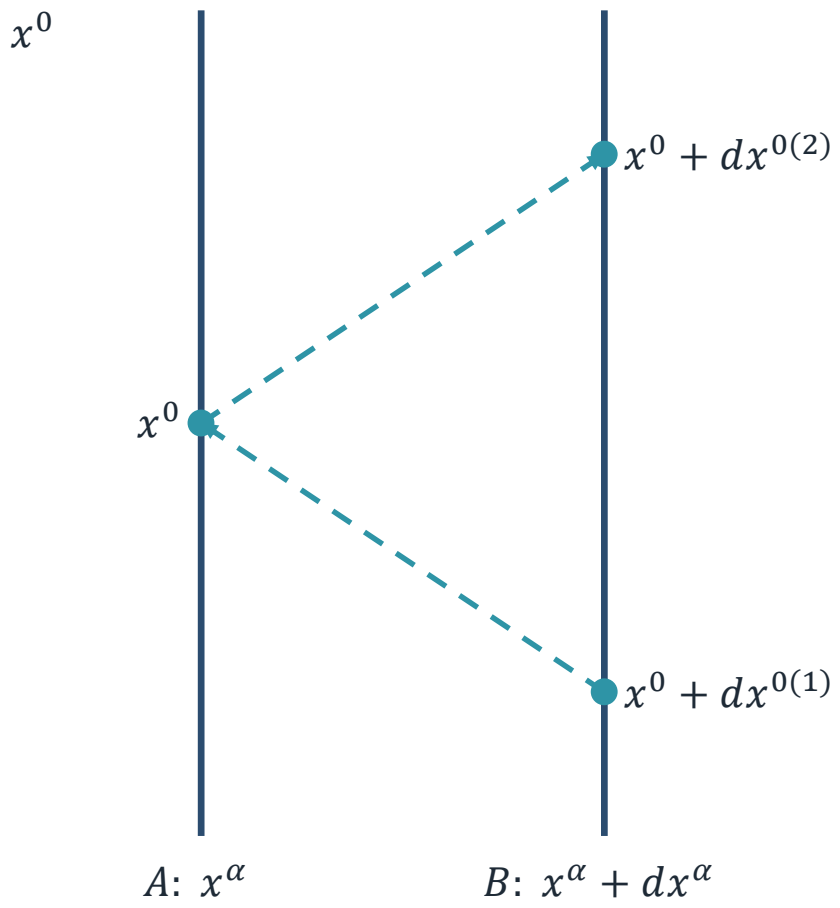
$r > c/\Omega$ болғанда $g_{00} < 0$: шеңбер бойындағы нүкте жарықтан жылдам қозғалуы керек еді.

Қашықтықты анықтау: радиолокациялық әдіс

ЖСТ-да dl элементін ds өрнегінде $dx^0 = 0$ деп алып табуға болмайды: гравитациялық өрісте меншікті уақыт кеңістіктің әр нүктесінде x^0-мен әр түрлі байланысқан.

Әдіс: B нүктесінен $(x^\alpha + dx^\alpha)$ шексіз жақын A нүктесіне (x^α) жарық сигналы жіберіліп, бірден кері қайтады.

- Сигналдың барып-қайту уақыты B нүктесінде, бір сағатпен өлшенеді.
- Оны c-ға көбейтсек, екі нүкте арасындағы қашықтықтың екі еселенген мәні шығады.
- Жарық сигналының әлемдік сызығында $ds = 0$ — бұл dx^0-ді анықтайтын теңдеу.



2-сурет. Тұтас сызықтар — A, B нүктелерінің әлемдік сызықтары, үзік сызықтар — сигналдар.

Сигналдың барып-қайту уақыты

$2 = 0$ теңдеуін (2.16) бойынша dx^0-ге қатысты квадрат теңдеу ретінде шешеміз:

$$dx^{0(1,2)} = \frac{1}{g_{00}}\left(-g_{0\alpha}dx^{\alpha} \mp \sqrt{\left(g_{0\alpha}g_{0\beta} - g_{\alpha\beta}g_{00}\right)dx^{\alpha}dx^{\beta}}\right) \tag{2.17}$$

Сигналдың B-дан шығып, B-ға қайтып оралуына дейінгі толық «уақыт» аралығы:

$$dx^{0(2)} - dx^{0(1)} = \frac{2}{g_{00}}\sqrt{\left(g_{0\alpha}g_{0\beta} - g_{\alpha\beta}g_{00}\right)dx^{\alpha}dx^{\beta}}$$

Нақты уақытқа өту үшін (2.1) бойынша $\sqrt{g_{00}}/c$-ға, ал қашықтыққа өту үшін $c/2$-ге көбейтеміз:

$$dl = \frac{c}{2}\cdot\frac{\sqrt{g_{00}}}{c}\cdot\frac{2}{g_{00}}\sqrt{\left(g_{0\alpha}g_{0\beta} - g_{\alpha\beta}g_{00}\right)dx^{\alpha}dx^{\beta}} \;\Rightarrow\; dl^2 = \left(-g_{\alpha\beta} + \frac{g_{0\alpha}g_{0\beta}}{g_{00}}\right)dx^{\alpha}dx^{\beta}$$

Сағаттар синхрондалмағандықтан, $dx^{0(1)}$ мен $dx^{0(2)}$ таңбалары бірдей болуы да мүмкін — бұл қайшылыққа әкелмейді.

Кеңістіктің үшөлшемді метрикасы

Кеңістіктік қашықтық элементі:

$$dl^2 = \gamma_{\alpha\beta}\, dx^\alpha dx^\beta \qquad (2.18)$$

$$\gamma_{\alpha\beta} = -g_{\alpha\beta} + \frac{g_{0\alpha} g_{0\beta}}{g_{00}} \qquad (2.19)$$

- $\gamma_{\alpha\beta}$ — кеңістіктің геометриялық қасиеттерін анықтайтын үшөлшемді метрикалық тензор. (2.7) нақты кеңістік метрикасы мен кеңістік-уақыт метрикасын байланыстырады.
- Жалпы жағдайда g_{ik} x^0-ге тәуелді, сондықтан кеңістіктік метрика уақыт бойынша өзгереді: dl-ды интегралдау мағынасыз, денелер арасындағы ақырлы қашықтық ұғымы жоғалады.
- dl-ды интегралдаудың мағынасы жоқ — интеграл берілген екі нүкте арасындағы қай әлемдік сызық бойымен алынғанына тәуелді болады.

Оң анықталғандық

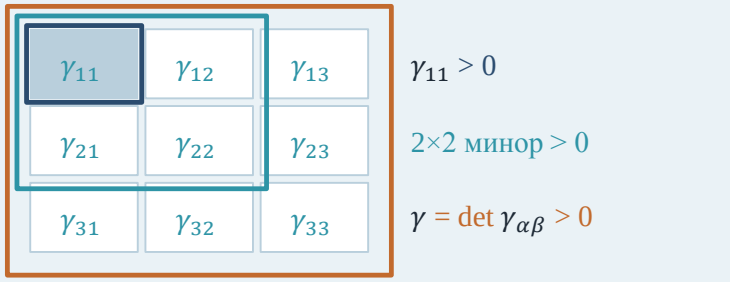
dl^2 — оң квадраттық форма. Сильвестр шарттары:

$$\gamma_{11} > 0, \quad \begin{vmatrix} \gamma_{11} & \gamma_{12} \\ \gamma_{21} & \gamma_{22} \end{vmatrix} > 0, \quad \gamma > 0$$

g_{ik} арқылы бұлар мына түрге келеді:

$$\begin{vmatrix} g_{00} & g_{01} \\ g_{10} & g_{11} \end{vmatrix} < 0, \quad \ldots, \quad g < 0$$

Бұл шарттар $g_{00} > 0$-мен бірге нақты денелер арқылы іске асатын кез келген санақ жүйесінде орындалуы тиіс.



Сильвестр критерийі: $\gamma_{\alpha\beta}$ оң анықталған — бас минорлар оң.

Мысал: айналмалы жүйенің кеңістіктік метрикасы

1-дәрістегі айналмалы жүйенің интервалын цилиндрлік координаттарда ($x = r\cos\varphi$, $y = r\sin\varphi$) жазамыз:

$$ds^2 = \left(1 - \frac{\Omega^2 r^2}{c^2}\right) c^2 dt^2 - 2\Omega r^2 d\varphi\, dt - dr^2 - r^2 d\varphi^2 - dz^2$$

$x^0 = ct$ болғанда метриканың нөлдік емес компоненттері:

$$g_{00} = 1 - \frac{\Omega^2 r^2}{c^2}, \quad g_{0\varphi} = -\frac{\Omega r^2}{c}, \quad g_{\varphi\varphi} = -r^2$$

(2.7) бойынша, $g_{rr} = g_{zz} = -1$ ескеріп:

$$\gamma_{\varphi\varphi} = r^2 + \frac{\Omega^2 r^4/c^2}{1 - \Omega^2 r^2/c^2} = \frac{r^2}{1 - \Omega^2 r^2/c^2}$$

$$dl^2 = dr^2 + dz^2 + \frac{r^2 d\varphi^2}{1 - \Omega^2 r^2/c^2}$$

Айналмалы дискке қайта оралу

$r = R$ шеңбердің ұзындығы ($dr = dz = 0$, φ: $0 \to 2\pi$):

$$L = \int_0^{2\pi} \frac{R\, d\varphi}{\sqrt{1 - \Omega^2 R^2/c^2}} = \frac{2\pi R}{\sqrt{1 - \Omega^2 R^2/c^2}}$$

Радиус бойымен $dl = dr$, сондықтан диаметр $2R$. Қатынас:

$$\frac{L}{2R} = \frac{\pi}{\sqrt{1 - \Omega^2 R^2/c^2}} > \pi$$

Кеңістік евклидтік емес — 1-дәрістегі ойша тәжірибенің нәтижесі метрикадан тікелей шықты.

Сағаттарды синхрондау

Кеңістіктің әр түрлі нүктелеріндегі сағаттарды жарық сигналдарымен салыстырамыз (2-сурет). B нүктесіндегі x^0 мезетімен бір мезгілде деп сигналдың A-дан шығуы мен A-ға қайтуы мезеттерінің **қақ ортасын** аламыз:

$$x^0 + \Delta x^0 = x^0 + \frac{1}{2}\left(dx^{0(2)} + dx^{0(1)}\right)$$

(2.5)-ті қойсақ, шексіз жуық бірмезгілді оқиғалар үшін:

$$\Delta x^0 = -\frac{g_{0\alpha}dx^\alpha}{g_{00}} \qquad (2.14)$$

- Бұл шарт кез келген шексіз аз көлемде, одан әрі кез келген **тұйықталмаған** сызық бойымен синхрондауға мүмкіндік береді.
- Синхрондау шартын $dx_0 = g_{0i}dx^i = 0$ түрінде де жазуға болады.

Тұйық контур

Тұйық контурды айналып, бастапқы нүктеге оралғанда, жалпы алғанда, нөлден өзгеше Δx^0 аламыз:

$$\Delta x^0 = -\oint \frac{g_{0\alpha}dx^\alpha}{g_{00}} \neq 0$$

Сондықтан сағаттарды бүкіл кеңістікте бір мәнді синхрондау, жалпы айтқанда, мүмкін емес.

Ерекшелік: барлық $g_{0\alpha} = 0$ болатын жүйелер. Кез келген гравитациялық өрісте мұндай жүйені таңдауға болады — бұл кеңістік-уақыттың емес, санақ жүйесінің қасиеті.

Қорытынды

- Қисық сызықты координаттарда контравариантты векторлар dx^i сияқты, ковариантты векторлар $\partial\varphi/\partial x^i$ сияқты түрленеді.
- g_{ik} — симметриялы ковариантты метрикалық тензор; g^{ik} — оған кері; олар индекстерді көтереді және түсіреді.
- Бір нүктедегі меншікті уақыт $d\tau = \sqrt{g_{00}}\,dx^0/c$; нақты санақ жүйесінде $g_{00} > 0$.
- Кеңістіктік қашықтық радиолокациялық әдіспен анықталады: $dl^2 = \gamma_{\alpha\beta}dx^\alpha dx^\beta$; ақырлы қашықтық жалпы жағдайда мағынасыз.
- Синхрондау шарты $\Delta x^0 = -g_{0\alpha}dx^\alpha/g_{00}$; тұйық контурда, жалпы алғанда, орындалмайды.
- Айналмалы жүйеде шеңбер/диаметр $> \pi$.

Негізгі формулалар

$$A^i = g^{ik}A_k, \quad g^{ik}g_{kl} = \delta^i_l$$

$$d\tau = \frac{1}{c}\sqrt{g_{00}}\,dx^0$$

$$\gamma_{\alpha\beta} = -g_{\alpha\beta} + \frac{g_{0\alpha}g_{0\beta}}{g_{00}}$$

$$\Delta x^0 = -\frac{g_{0\alpha}dx^\alpha}{g_{00}}$$

Келесі дәріс: тензорлар I — анықтама, түрлену заңы, базис және компоненттер.

Пайдаланылған әдебиеттер

1. Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М. Теориялық физика. II том: Өріс теориясы: оқулық / ауд. Т.Ә. Қожамқұлов, Н. Қойшыбаев. – Алматы: Қазақ университеті, 2009. – 563 б.
2. Бейсен Н.Ә. Электродинамика. – Алматы: Қазақ университеті, 2010.
3. Мармо С.И., Фролов М.В. Лекции по электродинамике, ч. 1–2. – Воронеж: ИПЦ ВГУ, 2009.
4. Топтыгин И.Н. Современная электродинамика. – Москва–Ижевск: ИКИ, 2002.
5. Матвеев А.Н. Электродинамика и теория относительности. – Москва: Высшая школа, 1985.
6. Джексон Дж. Классическая электродинамика. – Москва: Мир, 1988.
7. Griffiths D.J. Introduction to Electrodynamics. – New Jersey: Addison-Wesley, 2013.
8. Гречко Л.Г., Сугаков В.И., Томасевич О.Ф., Федорченко А.М. Задачи по теоретической физике. – Мир, 1997.
9. Батыгин В.В., Топтыгин И.Н. Сборник задач по электродинамике. – Москва: НИЦ, 2002.