Дәріс 1

Жалпы салыстырмалылық теориясына кіріспе. Эквиваленттілік принципі

Дәріс мақсаты

Дәрістің мақсаты: гравитациялық өрістің басты қасиетінен — барлық денелердің массасына тәуелсіз бірдей қозғалуынан — эквиваленттілік принципін шығару және оның салдарын талдау.

Инерциалды емес санақ жүйесінде интервалдың квадраты координаттар дифференциалдарының жалпы квадраттық формасы $ds^2 = g_{ik}dx^i dx^k$ болатынын көрсету.

Гравитациялық өрісті кеңістік-уақыт метрикасының өзгерісі ретінде түсіну: жазық және қисық кеңістік-уақыт, жергілікті галилейлік жүйе, ЖСТ-дағы санақ жүйесі ұғымы.

Бұл дәрістің ұғымдары курстың қалған бөлігінің (тензорлар, ковариантты туынды, қисықтық, Эйнштейн теңдеулері) бастапқы нүктесі болады.

Дәріс жоспары

- Гравитациялық өрістің негізгі қасиеті
- Эквиваленттілік принципі
- «Нағыз» өріс және инерция өрістері
- Айналмалы жүйедегі интервал
- Метрикалық тензор g_{ik}
- Гравитация — кеңістік-уақыт геометриясы
- Жазық және қисық кеңістік-уақыт
- Айналмалы диск: евклидтік емес геометрия
- ЖСТ-дағы санақ жүйесі
- Әлсіз өріс: алдын ала шолу

Гравитациялық өрістің негізгі қасиеті

Гравитациялық өрісте барлық денелер (бастапқы шарттары бірдей болса) **массаларына тәуелсіз бірдей қозғалады**. Мысалы, Жердің тартылыс өрісінде барлық денелер бірдей үдеумен еркін түседі.

Релятивистік емес механикада (инерциалды жүйеде) Лагранж функциясы:

$$L = \frac{mv^2}{2} - m\varphi \qquad (1.1)$$

$\varphi(\mathbf{r}, t)$ — гравитациялық потенциал. Лагранж теңдеуі $\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \mathbf{v}} = \frac{\partial L}{\partial \mathbf{r}}$ береді:

$$m\dot{\mathbf{v}} = -m\,\mathrm{grad}\,\varphi \quad \Rightarrow \quad \dot{\mathbf{v}} = -\mathrm{grad}\,\varphi \qquad (1.2)$$

Масса қысқарады: қозғалыс теңдеуіне массаны немесе бөлшектің басқа қасиетін сипаттайтын ешбір тұрақты кірмейді. Бұл — гравитациялық өрістің негізгі қасиетінің математикалық көрінісі.

Салыстыру: электр өрісі

Зарядталған бөлшек үшін:

$$m\dot{\mathbf{v}} = e\mathbf{E} \;\Rightarrow\; \dot{\mathbf{v}} = \frac{e}{m}\mathbf{E}$$

Үдеу e/m қатынасына тәуелді: әр түрлі бөлшектер әр түрлі қозғалады.

Гравитацияда «заряд» рөлін массаның өзі атқарады, сондықтан ол теңдеуден қысқарады.

(1.1)-дегі екі m — инерттік және гравитациялық масса — бірдей; дәл осы теңдік принциптің негізі.

Эквиваленттілік принципі

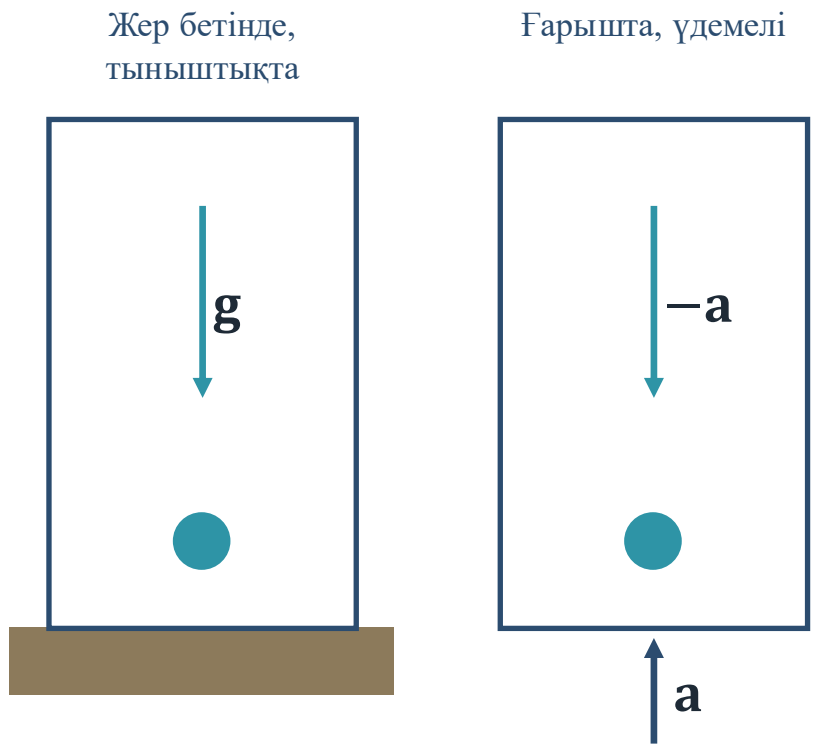
Инерциалды жүйеде еркін денелер бірқалыпты түзу сызықты қозғалады; бастапқы жылдамдықтары бірдей болса, олар әрдайым бірдей қозғалады. Демек, кез келген **инерциалды емес** жүйеге қатысты да барлық денелер бірдей қозғалады.

Эквиваленттілік принципі: инерциалды емес санақ жүйесі қайсыбір гравитациялық өріске эквивалентті.

Мысал: K' жүйесі K-ға қатысты тұрақты $\mathbf{a}$ үдеумен қозғалады:

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}' + \frac{\mathbf{a}t^2}{2}, \quad \ddot{\mathbf{r}} = 0 \;\Rightarrow\; \ddot{\mathbf{r}}' = -\mathbf{a}$$

- Барлық денелер K'-та бірдей $-\mathbf{a}$ үдеу алады — бұл біртекті тұрақты өріс $\mathbf{g} = -\mathbf{a}$ (потенциалы $\varphi = \mathbf{a} \cdot \mathbf{r}'$).
- Бірқалыпсыз үдемелі ілгерілемелі жүйе $\mathbf{a}(t)$ — біртекті, бірақ айнымалы өріске эквивалентті.



1-сурет. Ішкі бақылаушы механикалық тәжірибе арқылы екі жағдайды ажырата алмайды ($\mathbf{a} = -\mathbf{g}$).

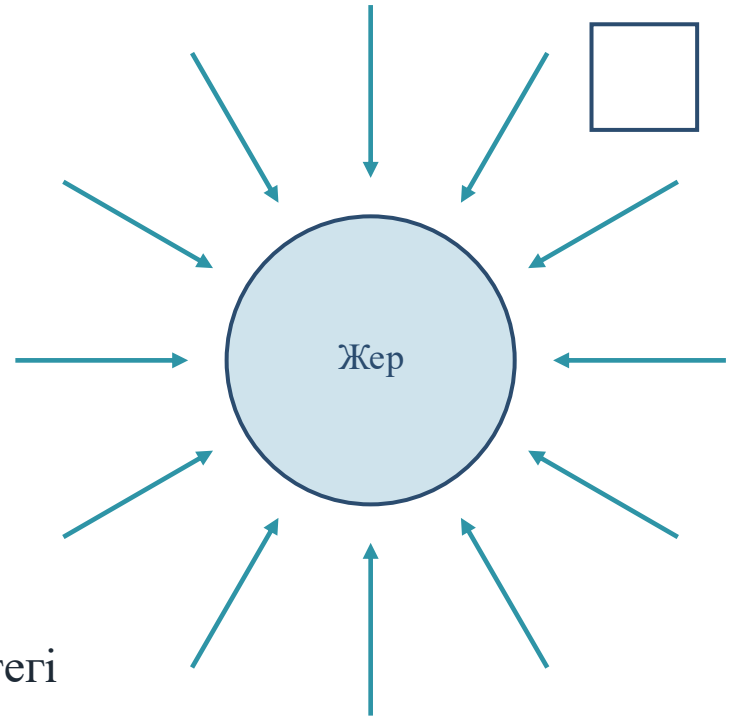
«Нағыз» гравитациялық өріс және инерция өрістері

Эквиваленттік толық емес: инерциалды емес жүйелерге эквивалентті өрістер «нағыз» өрістерге тура келмейді. Айырмашылық — **шексіздіктегі қасиеттерде**:

- «нағыз» өріс оны тудыратын денелерден шексіз алыста нөлге ұмтылады;
- инерция өрістері шексіздікте шексіз өседі (айналмалы жүйеде центрден тепкіш үдеу $\Omega^2\rho$ осьтен қашықтаған сайын артады) немесе шектелген күйде қалады (үдемелі жүйеде өріс барлық жерде бірдей).

Инерция өрістері инерциалды жүйеге өткенде жоғалады. «Нағыз» өрісті ешбір санақ жүйесін таңдап жою мүмкін емес — шексіздіктегі шарттар үйлеспейді.

Мүмкін нәрсе: өрісті біртекті деп санауға болатын жеткілікті кіші аймақта жою. Ол үшін үдеуі осы аймақтағы бөлшектің үдеуіне тең үдемелі жүйені таңдаймыз.



2-сурет. «Нағыз» өріс біртекті емес және алыста әлсірейді. Кіші аймақта (шаршы) оны біртекті деп санап, үдемелі жүйемен жоюға болады.

Релятивистік механика: айналмалы жүйедегі интервал

Инерциалды жүйеде декарт координаттарында интервал $ds^2 = c^2dt^2 - dx^2 - dy^2 - dz^2$; Лоренц түрлендірулерінде оның түрі сақталады. z осінен Ω бұрыштық жылдамдықпен бірқалыпты айналатын жүйеге өтейік:

$$x = x'\cos\Omega t - y'\sin\Omega t, \quad y = x'\sin\Omega t + y'\cos\Omega t, \quad z = z'$$

Дифференциалдап, квадраттап қоссақ ($\cos^2 + \sin^2 = 1$ қолданамыз):

$$dx^2 + dy^2 = dx'^2 + dy'^2 + \Omega^2(x'^2 + y'^2)dt^2 + 2\Omega(x'dy' - y'dx')dt$$

Сонда интервал:

$$ds^2 = [c^2 - \Omega^2(x'^2 + y'^2)]dt^2 - dx'^2 - dy'^2 - dz'^2 + 2\Omega y'dx'dt - 2\Omega x'dy'dt$$

- Уақыт қандай заң бойынша түрленсе де, бұл өрнекті төрт дифференциалдың квадраттарының қосындысына келтіру мүмкін емес.
- $dx'dt$, $dy'dt$ аралас мүшелері пайда болды, ал dt^2 коэффициенті осьтен қашықтыққа тәуелді.

Метрикалық тензор g_{ik}

Инерциалды емес жүйеде интервалдың квадраты — координаттар дифференциалдарының жалпы квадраттық формасы:

$$ds^2 = g_{ik}\, dx^i dx^k \qquad (1.3)$$

- g_{ik} — x^0 уақыттық және x^1, x^2, x^3 кеңістіктік координаттардың функциялары; координаттар жүйесі қисық сызықты.
- $g_{ik} = g_{ki}$ (симметриялы): барлығы 10 түрлі шама. Олар кеңістік-уақыттың **метрикасын** анықтайды.
- Инерциалды жүйеде, $x^0 = ct$ және декарт координаттарында — **галилейлік** мәндер:

$$g_{00} = 1, \quad g_{11} = g_{22} = g_{33} = -1, \quad g_{ik} = 0\ (i \neq k) \qquad (1.4)$$

Релятивистік механикада инерциалды емес жүйеге эквивалентті өрістер g_{ik} шамаларымен анықталады.

Мысал: айналмалы жүйе

6-слайдтағы интервалдан ($x^0 = ct$, штрихтарды түсірдік):

$$g_{00} = 1 - \frac{\Omega^2(x^2 + y^2)}{c^2}$$

$$g_{01} = \frac{\Omega y}{c}, \quad g_{02} = -\frac{\Omega x}{c}$$

$$g_{11} = g_{22} = g_{33} = -1$$

Аралас мүше $2g_{01}dx^0dx^1$ түрінде кіреді — симметрия салдарынан 2 көбейткіші.

Гравитация — кеңістік-уақыт геометриясы

«Нағыз» гравитациялық өрістер туралы да осыны айтуға болады: **кез келген гравитациялық өріс — кеңістік-уақыт метрикасының өзгерісі**, сондықтан ол g_{ik} шамаларымен анықталады.

Демек, кеңістік-уақыттың геометриялық қасиеттері (метрикасы) физикалық құбылыстармен анықталады; олар кеңістік пен уақыттың өзгермейтін қасиеттері емес.

Салыстырмалылық теориясы негізінде құрылған гравитация теориясы — **жалпы салыстырмалылық теориясы**. Оны Эйнштейн жасады (соңғы түрі — 1915 ж.); теория дедуктивті жолмен құрылып, кейін астрономиялық бақылаулармен расталды.

	Ньютон теориясы	Жалпы салыстырмалылық теориясы
Гравитацияны сипаттайтын шама	φ потенциалы — 1 функция	g_{ik} метрикасы — 10 функция
Қозғалыс теңдеуі	$\dot{\mathbf{v}} = -\mathrm{grad}\,\varphi$	геодезиялық сызық (6-дәріс)
Кеңістік-уақыт	евклидтік кеңістік + абсолют уақыт	метрикасы материямен анықталады

1-кесте. Ньютон теориясы мен ЖСТ-ны салыстыру.

Жазық және қисық кеңістік-уақыт

- Инерциалды емес жүйеде g_{ik} галилейлік мәндерден координаттарды түрлендіру арқылы алынады, сондықтан кері түрлендірумен **бүкіл кеңістікте** қайтадан галилейлік түрге келтіріледі. Бұл — өте арнайы жағдай: 4 координатты түрлендіріп, жалпы алғанда 10 функцияны алдын ала берілген түрге келтіру мүмкін емес.
- «Нағыз» гравитациялық өрісті координаттардың ешбір түрлендіруімен жоюға болмайды: g_{ik} тұтас кеңістікте галилейлік түрге келмейді. Мұндай кеңістік-уақыт **қисық**, келтірілетіні — **жазық** деп аталады.
- Бірақ кез келген **бір нүктеде** g_{ik}-ды галилейлік түрге келтіруге болады (тұрақты коэффициентті квадраттық форманы диагоналдау) — осы нүктедегі галилейлік координаттар жүйесі.
- Диагоналданған матрицаның бір оң және үш теріс бас мәні бар (сигнатура). Сондықтан анықтауыш әрқашан теріс:

$$g = \det(g_{ik}) < 0 \qquad (1.3)$$

Нүктедегі галилейлік жүйе

Берілген P нүктесінде:

$$g_{ik}(P) \to \mathrm{diag}(1, -1, -1, -1)$$

Сигнатура $(+, -, -, -)$: бір уақыттық және үш кеңістіктік бағыт.

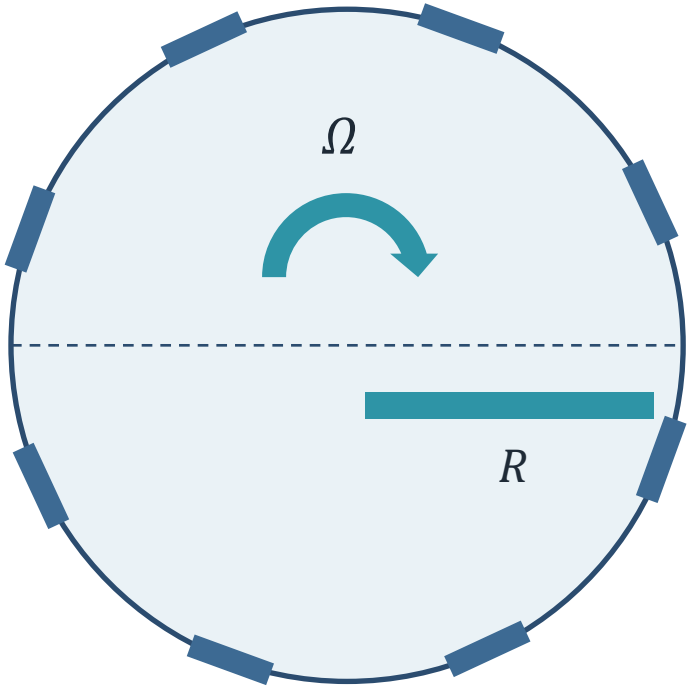
Бұл таңдау әзірге 4-көлемнің шексіз аз элементінде өрісті жою **емес**.

Эквиваленттілік принципі бойынша мұндай жою әрқашан мүмкін — бұл жергілікті-инерциалдық жүйе (5–6-дәрістер).

Ойша тәжірибе: айналмалы диск

K — инерциалды жүйе, K' — K-ға қатысты ортақ z осінен бірқалыпты айналады. Центрі координаттар басында жатқан шеңберді қарастырамыз.

- K-да тыныштықтағы сызғышпен өлшесек: шеңбер ұзындығының диаметрге қатынасы π — евклидтік геометрия.
- K'-та тыныштықтағы сызғышпен өлшейік. K-дан қарағанда шеңбер бойындағы сызғыштар өз ұзындығы бойымен қозғалып, **лоренцтік қысқарады**; радиус бойындағы сызғыш өзгермейді.
- Демек, K'-тағы өлшеу нәтижесі: шеңбер ұзындығы / диаметр $> \pi$.



3-сурет. Шеңбер бойындағы сызғыштар қысқарады, радиус бойындағысы — жоқ.

Сандық баға:

$$\frac{L'}{D'} = \frac{2\pi R/\sqrt{1-\Omega^2R^2/c^2}}{2R} = \frac{\pi}{\sqrt{1-\Omega^2R^2/c^2}} > \pi$$

Қорытынды: инерциалды емес жүйеге көшкенде кеңістіктің евклидтік еместігі сөзсіз пайда болады.

ЖСТ-дағы санақ жүйесі

- Айнымалы гравитациялық өрісте кеңістік метрикасы евклидтік емес және **уақыт бойынша өзгереді**: әр түрлі қашықтықтардың арақатынасы уақыт өте өзгеріп отырады.
- Сондықтан өріске енгізілген «сынақ бөлшектердің» өзара орналасуы ешбір координаттар жүйесінде өзгеріссіз қала алмайды (бөлшектер саны төрттен көп болса). ЖСТ-да денелер жүйесінің өзара қозғалмастығы, жалпы айтқанда, мүмкін емес.
- Санақ жүйесі — кеңістікті түгел толтыратын, «орта» тәрізді шексіз көп денелер жиынтығы және әрқайсысына бекітілген, өз бетімен жүретін сағаттар.
- Табиғат заңдары кез келген 4-өлшемді координаттар жүйесінде орындалатындай — **ковариантты** түрде жазылуы тиіс. Бірақ бұл жүйелердің физикалық эквиваленттілігін білдірмейді: құбылыстардың нақты түрі әр жүйеде әр түрлі.

Неге төрт бөлшек?

Төрт бөлшек арасында 6 кесінді бар — бұл тетраэдрдің 6 қыры.

Санақ жүйесін тиісінше таңдап, осы тетраэдрді өзгеріссіз сақтауға болады; үш немесе екі бөлшек үшін де солай.

Бесінші бөлшек қосылғанда ара қашықтықтардың бәрін тұрақты ұстау, жалпы алғанда, мүмкін болмайды.

АСТ-мен салыстыру: онда санақ жүйесі — бір-біріне қатысты тыныштықта тұрған қатты денелер.

Алдын ала шолу: әлсіз өріс және уақыттың өтуі

Аз жылдамдықтар шегінде өріс те әлсіз. Тұрақты $-mc^2$ қосылған Лагранж функциясы:

$$L = -mc^2 + \frac{mv^2}{2} - m\varphi \tag{1.6}$$

$S = \int L\,dt$ өрнегін $S = -mc\int ds$ өрнегімен салыстырсақ:

$$ds = \left(c - \frac{v^2}{2c} + \frac{\varphi}{c}\right)dt$$

Квадраттап, $c \to \infty$ кезде нөлге айналатын мүшелерді тастаймыз ($v\,dt = d\mathbf{r}$):

$$ds^2 = (c^2 + 2\varphi)dt^2 - d\mathbf{r}^2 \tag{1.7}$$

$$g_{00} = 1 + \frac{2\varphi}{c^2} \tag{1.8}$$

Толық қорытылуы мен қолданылу шарттары — 10-дәрісте («Әлсіз өріс және Ньютон шегі»).

Салдарлары

Тұрақты өрісте меншікті уақыт (84.1):

$$\tau = \frac{1}{c}\sqrt{g_{00}}\,x^0 \approx t\left(1 + \frac{\varphi}{c^2}\right)$$

$|\varphi|$ үлкен жерде ($\varphi < 0$) сағат баяу жүреді.

Гравитациялық қызыл ығысу (84.8):

$$\Delta\omega = \frac{\varphi_1 - \varphi_2}{c^2}\,\omega$$

Күн спектрі Жерде: $|\varphi_1| > |\varphi_2|$, $\Delta\omega < 0$.

Қорытынды

- Гравитациялық өрісте барлық денелер массасына тәуелсіз бірдей қозғалады: $\dot{\mathbf{v}} = -\mathrm{grad}\,\varphi$.
- Эквиваленттілік принципі: инерциалды емес санақ жүйесі гравитациялық өріске эквивалентті.
- Инерция өрістерін бүкіл кеңістікте жоюға болады; «нағыз» өрісті — тек кіші аймақта (нүктеде).
- Инерциалды емес жүйеде $ds^2 = g_{ik}dx^i dx^k$; g_{ik} — 10 функция, кеңістік-уақыт метрикасы.
- Гравитация — метриканың өзгерісі; «нағыз» өріс бар кеңістік-уақыт қисық, $g < 0$.
- Айналмалы жүйеде кеңістік геометриясы евклидтік емес; ЖСТ-да қатты санақ денелері жоқ, заңдар ковариантты жазылады.

Негізгі формулалар

$$\dot{\mathbf{v}} = -\mathrm{grad}\,\varphi$$

$$ds^2 = g_{ik}dx^i dx^k$$

$$g_{ik} = g_{ki}, \quad g < 0$$

$$g_{00} \approx 1 + \frac{2\varphi}{c^2}$$

Келесі дәріс: кеңістік-уақыт және гравитация; векторлар мен метрика.

Пайдаланылған әдебиеттер

1. Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М. Теориялық физика. II том: Өріс теориясы: оқулық / ауд. Т.Ә. Қожамқұлов, Н. Қойшыбаев. – Алматы: Қазақ университеті, 2009. – 563 б..
2. Бейсен Н.Ә. Электродинамика. – Алматы: Қазақ университеті, 2010.
3. Мармо С.И., Фролов М.В. Лекции по электродинамике, ч. 1–2. – Воронеж: ИПЦ ВГУ, 2009.
4. Топтыгин И.Н. Современная электродинамика. – Москва–Ижевск: ИКИ, 2002.
5. Матвеев А.Н. Электродинамика и теория относительности. – Москва: Высшая школа, 1985.
6. Джексон Дж. Классическая электродинамика. – Москва: Мир, 1988.
7. Griffiths D.J. Introduction to Electrodynamics. – New Jersey: Addison-Wesley, 2013.
8. Гречко Л.Г., Сугаков В.И., Томасевич О.Ф., Федорченко А.М. Задачи по теоретической физике. – Мир, 1997.
9. Батыгин В.В., Топтыгин И.Н. Сборник задач по электродинамике. – Москва: НИЦ, 2002.