Дәріс 10

Әлсіз өріс және Ньютон шегі

Қауымдастырылған профессор
Уразалина Айнур Адилхановна

Дәріс мақсаты

Дәрістің мақсаты: Эйнштейн теңдеулерінен релятивистік емес шекте Ньютонның тартылыс теориясын — Пуассон теңдеуін және бүкіләлемдік тартылыс заңын — алу.

Ньютон потенциалының қасиеттері: мультипольдік жіктелу, дипольдік мүшенің болмауы, квадрупольдік момент.

Сызықтандырылған Эйнштейн теңдеулері және әлсіз өрістің толық метрикасы; Ньютон жуықтауының қолданылу шегі.

Дәріс жоспары

- Ньютондық шектің шарттары
- Эйнштейн теңдеулерінің 00-компоненті
- Пуассон теңдеуі
- Ньютон заңы, потенциалдық энергия
- Мультипольдік жіктелу
- Біртекті шар
- Сызықтандырылған теңдеулер
- Әлсіз өрістің метрикасы
- Қолданылу шегі

- **Аз жылдамдықтар:** $v \ll c$. 6-дәрісте көргеніміздей, бұл өрістің өзі де әлсіз болуын талап етеді: $|\varphi| \ll c^2$.
- **Метрика:** бізге қажеттісі тек g_{00} (6.12):

$$g_{00} = 1 + \frac{2\varphi}{c^2}$$

- **Материя:** шаң тәрізді, $T_i^k = \mu c^2 u_i u^k$ (35.4), мұндағы μ — тыныштықтағы масса тығыздығы.
- **Макроскоптық қозғалыс баяу:** $u^\alpha \approx 0$, $u^0 = u_0 \approx 1$. Сондықтан T_i^k-ның тек бір компоненті қалады:

$$T_0^0 = \mu c^2, \qquad T = T_i^i = \mu c^2 \tag{10.1}$$

Масштабтар

Ньютон шегі — $1/c$ бойынша жіктеудің бірінші мүшесі.

Уақыт бойынша туындылар $x^0 = ct$ арқылы кіреді, сондықтан кеңістіктік туындылармен салыстырғанда v/c есе кіші.

$\Gamma\Gamma$ көбейтінділері φ^2/c^4 ретті — екінші ретті аз шама.

Қысым $p \sim \mu v^2 \ll \mu c^2$ — ескерілмейді.

Эйнштейн теңдеулерінің 00-компоненті

Теңдеулерді (9.14) түрінде жазамыз; $i = k = 0$ үшін:

$$R_0^0 = \frac{8\pi k}{c^4}\left(T_0^0 - \frac{1}{2}T\right) = \frac{4\pi k}{c^2}\mu$$

(8.7) бойынша R_{00}-ді есептегенде $ГГ$ мүшелері мен x^0 бойынша туындылар аз, сондықтан:

$$R_0^0 \approx R_{00} \approx \frac{\partial \Gamma_{00}^{\alpha}}{\partial x^{\alpha}}$$

6-дәрістен $\Gamma_{00}^{\alpha} \approx -\frac{1}{2}g^{\alpha\alpha}\frac{\partial g_{00}}{\partial x^{\alpha}} = \frac{1}{c^2}\frac{\partial \varphi}{\partial x^{\alpha}}$, демек:

$$R_0^0 = \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^{\alpha}\partial x^{\alpha}} = \frac{1}{c^2}\Delta\varphi$$

Неге (91.8) түрі?

(91.8)-де оң жақта $T_{ik} - \frac{1}{2}g_{ik}T$ тұр. Шаң үшін:

$$T_0^0 - \frac{1}{2}T = \frac{1}{2}\mu c^2$$

Сол жақта тек Риччи тензоры — ол $Г$-ның туындыларынан қарапайым түрде құрылады.

Кеңістіктік компоненттер $(\alpha\beta)$ $g_{\alpha\beta}$-ға түзетулерді анықтайды, бірақ олар қозғалыс теңдеуіне v^2/c^2 көбейткішімен кіреді.

Пуассон теңдеуі

Алдыңғы екі өрнекті теңестірсек:

$$\Delta\varphi = 4\pi k\mu \qquad (10.2)$$

Бұл — релятивистік емес механикадағы гравитациялық өріс теңдеуі. Ол электростатикадағы Пуассон теңдеуіне $\Delta\varphi = -4\pi\rho$ толық ұқсас: заряд тығыздығының орнында $-k\mu$ тұр.

Сондықтан жалпы шешімін бірден жаза аламыз:

$$\varphi = -k\int \frac{\mu\, dV}{R} \qquad (10.3)$$

Бұл өрнек массалардың кез келген таралуы үшін релятивистік емес жуықтаудағы потенциалды береді.

	Электростатика	Гравитация
Көз	ρ	μ
Теңдеу	$\Delta\varphi = -4\pi\rho$	$\Delta\varphi = 4\pi k\mu$
Нүктелік көз	e/R	$-km/R$
Бірдей көздер	тебіседі	тартылады



Гаусс теоремасы: тұйық бет арқылы өтетін өріс ағыны ішіндегі массаға пропорционал — Пуассон теңдеуінің интегралдық түрі.

Ньютонның тартылыс заңы

Массасы m бөлшектің өрісінің потенциалы:

$$\varphi = -\frac{km}{R} \qquad (10.4)$$

Осы өрісте массасы m' бөлшекке әсер ететін күш:

$$\mathbf{F} = -m'\frac{\partial \varphi}{\partial \mathbf{R}} = -\frac{kmm'\mathbf{R}}{R^3}$$

— Ньютонның бүкіләлемдік тартылыс заңы. Массалардың кез келген таралуы үшін потенциалдық энергия:

$$U = \frac{1}{2}\int \mu\varphi \, dV \qquad (10.5)$$

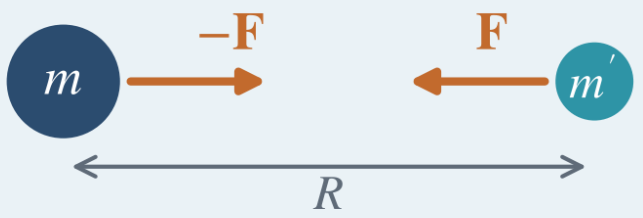
Физикалық мағынасы

Бөлшектің гравитациялық өрістегі потенциалдық энергиясы — оның массасы мен өріс потенциалының көбейтіндісі, $m'\varphi$.

Бұл — электр өрісіндегі $e\varphi$-ге ұқсас.

Мұнда «гравитациялық заряд» — масса, ал ол инерттік массамен бірдей: эквиваленттілік принципі.

k тұрақтысы — гравитациялық тұрақты.



Екі масса бір-біріне тең және қарама-қарсы күштермен тартылады, $F \propto kmm'/R^2$.

Ньютон потенциалының мультипольдік жіктелуі

Массалардан алыс қашықтықта электростатикадағыдай жіктеу жүргіземіз. Координаттар басын массалардың инерция центрінде алсақ, дипольдік моменттің ұқсасы $\int \mu \mathbf{r}\, dV = 0$. Демек, гравитацияда **дипольдік мүше әрқашан жоқ**:

$$\varphi = -\frac{km}{r} - \frac{k}{6} D_{\alpha\beta} \frac{\partial^2}{\partial x_\alpha \partial x_\beta} \frac{1}{r} + \cdots \qquad (10.7)$$

$m = \int \mu\, dV$ — толық масса, ал квадрупольдік момент тензоры:

$$D_{\alpha\beta} = \int \mu \left(3 x_\alpha x_\beta - r^2 \delta_{\alpha\beta}\right) dV \qquad (10.8)$$

Ол инерция тензорымен $J_{\alpha\beta} = \int \mu \left(r^2 \delta_{\alpha\beta} - x_\alpha x_\beta\right) dV$ байланысқан:

$$D_{\alpha\beta} = J_{\gamma\gamma} \delta_{\alpha\beta} - 3 J_{\alpha\beta} \qquad (10.9)$$

Неге диполь жоқ?

Электростатикада оң және теріс зарядтар бар, сондықтан $\int \rho \mathbf{r}\, dV$ координаттар басын таңдауға тәуелсіз.

Гравитацияда «заряд» тек оң — масса. Инерция центрін басы етіп алсақ, $\int \mu \mathbf{r}\, dV = 0$ болады.

Сфералық симметриялы дене үшін $D_{\alpha\beta} = 0$: сыртындағы өріс нүктелік массаның өрісімен бірдей.

Жердің жаншылуы $D_{\alpha\beta} \neq 0$ береді — серіктердің орбиталарына әсер етеді.

Мысал: біртекті шар

a радиусты, μ тығыздықты шар ($m = \frac{4\pi}{3} a^3 \mu$). Сыртында $\varphi = -\,km/r$, ішінде:

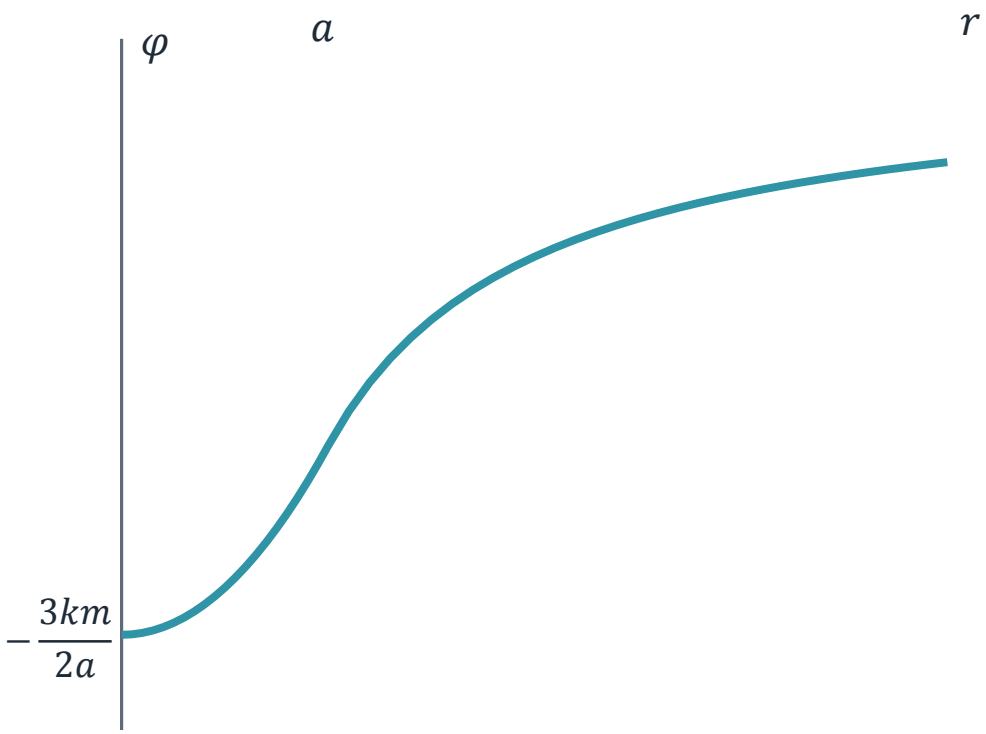
$$\varphi = -2\pi k\mu \left(a^2 - \frac{r^2}{3} \right)$$

Тексеру: $\Delta\varphi = \frac{1}{r^2}\frac{d}{dr}\left(r^2 \frac{d\varphi}{dr}\right) = 4\pi k\mu$, ал $r = a$-да ішкі және сыртқы мәндер беттеседі.

Шардың гравитациялық энергиясы:

$$U = -\frac{3km^2}{5a}$$

- Біртекті эллипсоид үшін де потенциал элементар интегралдар арқылы өрнектеледі; айналып тұрған сұйықтың тепе-теңдік пішіні — жаншылған айналу эллипсоиді.



1-сурет. Біртекті шардың потенциалы: ішінде парабола, сыртында $-km/r$.

Әлсіз статикалық өрістің метрикасы

Статикалық көз: $\square \to \Delta$, тек $T_0^0 = \mu c^2$. Пуассон теңдеуімен салыстырсақ, $\psi_0^0 = 4\varphi/c^2$, қалғандары нөл. $h = -\psi = -4\varphi/c^2$, сондықтан:

$$h_{00} = \frac{2\varphi}{c^2}, \qquad h_{\alpha\beta} = \frac{2\varphi}{c^2}\delta_{\alpha\beta}, \qquad h_{0\alpha} = 0$$

$$ds^2 = \left(1 + \frac{2\varphi}{c^2}\right)c^2dt^2 - \left(1 - \frac{2\varphi}{c^2}\right)(dx^2 + dy^2 + dz^2)$$

- Нүктелік масса үшін $2\varphi/c^2 = -r_g/r$, $r_g = 2km/c^2$; бұл — Шварцшильд метрикасының изотропты координаттардағы алыс өрісі.
- Баяу бөлшектің қозғалысына тек g_{00} әсер етеді (Ньютон).
- Жарық үшін g_{00} мен $g_{\alpha\beta}$ бірдей үлес қосады — жарықтың ауытқу бұрышы «ньютондық» мәннен **екі есе** үлкен (13-дәріс).

Салдарлары

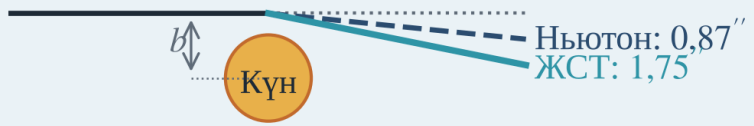
Уақыттың баяулауы:

$$d\tau = \left(1 + \frac{\varphi}{c^2}\right)dt$$

Гравитациялық қызыл ығысу:

$$\frac{\Delta\omega}{\omega} = \frac{\varphi_1 - \varphi_2}{c^2}$$

Кеңістік геометриясы евклидтік емес: радиалдық қашықтықтар $1 - \varphi/c^2$ есе «созылады».



Жарықтың Күн маңында ауытқуы: ЖСТ мәні ньютондық мәннен екі есе үлкен (13-дәріс).

Ньютон жуықтауының қолданылу шегі

Әлсіз өріс критерийі — беттегі өлшемсіз потенциал $|\varphi|/c^2 = r_g/(2R)$. Жылдамдықтар үшін вириал теоремасы бойынша $v^2/c^2 \sim |\varphi|/c^2$.

Объект	Масса, M⊙	Радиус	r_g	$\lvert\varphi\rvert/c^2$
Жер	$3 \cdot 10^{-6}$	6370 км	0,9 см	$7 \cdot 10^{-10}$
Күн	1	$7 \cdot 10^5$ км	3 км	$2 \cdot 10^{-6}$
Ақ ергежейлі	0,6	$\sim$ 7000 км	1,8 км	$\sim 10^{-4}$
Нейтрон жұлдызы	1,4	$\sim$ 12 км	4 км	$\sim$ 0,2
Қара құрдым	кез келген	r_g	r_g	$\sim$ 1

Күн жүйесінде ЖСТ түзетулері 10^{-6}–10^{-8} ретті — бірақ өлшенеді (Меркурий перигелийі, жарықтың ауытқуы, GPS).

Қорытынды

$|\varphi|/c^2 \ll 1$ — Ньютон жеткілікті.

$|\varphi|/c^2 \sim 0{,}1$–1 — толық ЖСТ қажет (11–12-дәрістер).

Қорытынды

- Аз жылдамдықтар ⇒ әлсіз өріс; Ньютон шегінде $g_{00} = 1 + 2\varphi/c^2$ және $T_0^0 = \mu c^2$.
- Эйнштейн теңдеулерінің 00-компоненті Пуассон теңдеуін береді: $\Delta\varphi = 4\pi k\mu$.
- Нүктелік масса өрісі $\varphi = -km/r$ — Ньютон заңы.
- Гравитацияда дипольдік мүше жоқ; бірінші түзету — квадрупольдік.
- Сызықтандырылған теңдеулер $\Box\psi_i^k = \frac{16\pi k}{c^4} T_i^k$ әлсіз өрістің толық метрикасын береді.
- Ньютон жуықтауы $|\varphi|/c^2 \ll 1$ кезде дұрыс.

Негізгі формулалар

$$\Delta\varphi = 4\pi k\mu$$

$$\varphi = -k\int \frac{\mu\, dV}{R}$$

$$\Box\psi_i^k = \frac{16\pi k}{c^4} T_i^k$$

$$g_{00} = 1 + \frac{2\varphi}{c^2}, \quad g_{\alpha\beta} = -\left(1 - \frac{2\varphi}{c^2}\right)\delta_{\alpha\beta}$$

Келесі дәріс: Шварцшильд шешімі I — метрика, горизонт, инварианттық талдау.

Пайдаланылған әдебиеттер

1. Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М. Теориялық физика. II том: Өріс теориясы: оқулық / ауд. Т.Ә. Қожамқұлов, Н. Қойшыбаев. – Алматы: Қазақ университеті, 2009. – 563 б.
2. Бейсен Н.Ә. Электродинамика. – Алматы: Қазақ университеті, 2010.
3. Мармо С.И., Фролов М.В. Лекции по электродинамике, ч. 1–2. – Воронеж: ИПЦ ВГУ, 2009.
4. Топтыгин И.Н. Современная электродинамика. – Москва–Ижевск: ИКИ, 2002.
5. Матвеев А.Н. Электродинамика и теория относительности. – Москва: Высшая школа, 1985.
6. Джексон Дж. Классическая электродинамика. – Москва: Мир, 1988.
7. Griffiths D.J. Introduction to Electrodynamics. – New Jersey: Addison-Wesley, 2013.
8. Гречко Л.Г., Сугаков В.И., Томасевич О.Ф., Федорченко А.М. Задачи по теоретической физике. – Мир, 1997.
9. Батыгин В.В., Топтыгин И.Н. Сборник задач по электродинамике. – Москва: НИЦ, 2002.