Дәріс 4

Тензорлар II: ковариантты және контравариантты тензорлар, дуалдық кеңістік, тензорлық алгебра

Қауымдастырылған профессор
Уразалина Айнур Адилхановна

Дәріс мақсаты

Дәрістің мақсаты: контравариантты және ковариантты шамалардың геометриялық айырмашылығын дуалдық кеңістік арқылы түсіндіру және тензорлармен жасалатын алгебралық амалдарды жүйелеу.

Метрикалық тензорды векторлар мен ковекторлар арасындағы сәйкестік ретінде қарастыру; жиыру, тензорлық көбейтінді, бөлу теоремасы.

Толық антисимметриялы тензорды, дуалды тензорларды және инвариантты 4-көлем элементін $\sqrt{-g}\, d\Omega$ қисық сызықты координаттарда енгізу.

Дәріс жоспары

- Екі түрлі түрлену заңы
- Дуалдық кеңістік, ковекторлар
- Метрика: векторлар ↔ ковекторлар
- Тензорлық көбейтінді, сызықтық амалдар
- Жиыру (ықшамдау)
- Бөлу теоремасы
- Антисимметриялы 4-тензор
- Толық антисимметриялы тензор
- Дуалды тензорлар, көлем элементі

Екі түрлі түрлену заңы

Координаттарды түрлендіргенде табиғи түрде екі түрлі шама пайда болады:

$$dx'^i = \frac{\partial x'^i}{\partial x^k} dx^k$$

- Ығысу dx^i — **контравариантты**: компоненттер координаттармен «бірге» өзгереді.
- Мысалдар: 4-жылдамдық $u^i = dx^i/ds$, 4-импульс p^i.

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x'^i} = \frac{\partial x^k}{\partial x'^i} \frac{\partial \varphi}{\partial x^k}$$

- Градиент $\partial\varphi/\partial x^i$ — **ковариантты**: кері матрицамен түрленеді.
- Мысалдар: толқындық вектор $k_i = -\partial\psi/\partial x^i$, $\partial S/\partial x^i$.

Олардың «жұптасуы» — скаляр, өйткені түрлендіру матрицалары өзара кері:

$$d\varphi = \frac{\partial \varphi}{\partial x^i} dx^i = \frac{\partial \varphi}{\partial x'^i} dx'^i$$

Демек, ковариантты вектор — контравариантты векторды санға айналдыратын объект. Осы ойдан дуалдық кеңістік туады.

Дуалдық кеңістік және ковекторлар

Нүктедегі барлық векторлар V сызықтық кеңістік құрайды. V-дағы сызықтық функционалдар $\omega(\mathbf{A})$ да сызықтық кеңістік құрайды — оны **дуалдық кеңістік** V^*, ал оның элементтерін **ковекторлар** деп атайды.

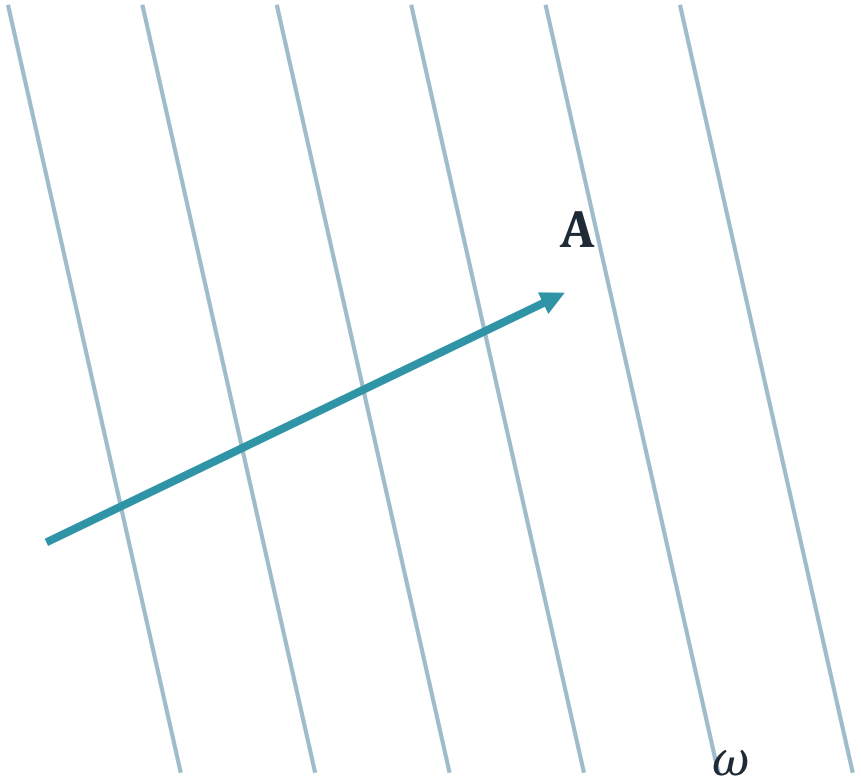
Дуалды базис $\mathbf{e}^i$ координаттық базиспен былай байланысқан:

$$\mathbf{e}^i(\mathbf{e}_k) = \delta^i_k$$

Ковектор $\omega = \omega_i \mathbf{e}^i$ векторға әсер еткенде:

$$\omega(\mathbf{A}) = \omega_i A^k \, \mathbf{e}^i(\mathbf{e}_k) = \omega_i A^i$$

- Координаттық дуалды базис — дифференциалдар: $\mathbf{e}^i = dx^i$; градиент $d\varphi = \frac{\partial \varphi}{\partial x^i} dx^i$ — ковектор.
- $\omega_i A^i$ үшін метрика **қажет емес**: жұптасу кез келген кеңістікте анықталған.



1-сурет. Ковектор — деңгей беттерінің жиынтығы; $\omega(\mathbf{A})$ — вектор қиып өтетін беттер саны (мұнда 3-ке жуық).

Метрика: векторлар мен ковекторлар арасындағы сәйкестік

Метрика бар кезде әр векторға бір ғана ковектор сәйкес келеді: $\widetilde{\mathbf{A}}(\mathbf{B}) = \mathbf{A} \cdot \mathbf{B} = g_{ik}A^iB^k$. Осыдан индексті түсіру және көтеру ережелері шығады:

$$A_i = g_{ik}A^k, \qquad A^i = g^{ik}A_k \tag{2.11}$$

Тензорлар үшін әр индекс жеке көтеріледі не түсіріледі:

$$A^i{}_k = g^{il}A_{lk}, \qquad A^{ik} = g^{il}g^{km}A_{lm}$$

- Бұл — бір физикалық шаманың әр түрлі компоненттері, жаңа шама емес.
- Галилейлік жүйеде $A^0 = A_0$, $A^\alpha = -A_\alpha$: уақыттық компонент өзгермейді, кеңістіктік компоненттер таңбасын ауыстырады.
- Аралас компоненттердің ретін сақтау керек: жалпы жағдайда $A^i{}_k \neq A^i_k$; симметриялы тензор үшін олар бірдей.

Метрикалық тензордың өзі

g_{ik} индексін g^{ik} арқылы көтерсек:

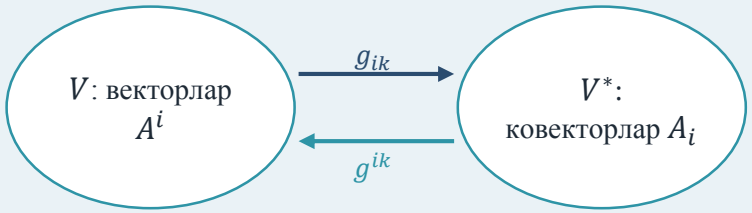
$$g^i{}_k = g^{il}g_{lk} = \delta^i_k$$

Сонымен, g_{ik}, g^{ik}, δ^i_k — бір тензордың үш формасы.

Жиыру:

$$g^{ik}g_{ik} = \delta^i_i = 4$$

Ол барлық координаттар жүйесінде 4-ке тең — кеңістік-уақыттың өлшемділігі.



Метрика V мен V^* арасында өзара бірмәнді сәйкестік орнатады.

Тензорлық алгебра: сызықтық амалдар және көбейтінді

1. Сызықтық комбинация — тек бірдей типті тензорлар үшін; нәтиже сол типті тензор:

$$C^i_k = \alpha A^i_k + \beta B^i_k \qquad (\alpha, \beta \ —скалярлар)$$

2. Тензорлық (сыртқы) көбейтінді — компоненттерді жай көбейтеміз; рангтер қосылады:

$$C^{ik}_l = A^i B^k_l \qquad (1,0) \otimes (1,1) = (2,1)$$

- Нәтиженің тензор екені түрлену заңдарынан тікелей шығады: көбейткіштердің коэффициенттері жай көбейтіледі.
- Тензорлық көбейтінді ассоциативті, бірақ жалпы алғанда коммутативті емес: $A^i B^k \neq A^k B^i$.
- Әр 2 рангілі тензор векторлардың көбейтінділерінің қосындысы ретінде жазылады, бірақ әрбірі бір ғана көбейтінді бола бермейді.

Индекстер ережесі

Тензорлық теңдіктің екі жағындағы еркін индекстер бірдей және бірдей орналасуы тиіс.

$A_{ik} = B_{ik}$ ✓ $\qquad A_{ik} = B^{ik}$ ×

Екіншісі бір жүйеде кездейсоқ орындалса да, басқа жүйеде бұзылады.

Жиыру (ықшамдау)

Жиыру — бір жоғарғы және бір төменгі индексті теңестіріп, олар бойынша қосынды алу. Ең қарапайым мысал — тензордың ізі:

$$A^i_{\ i} = A^0_{\ 0} + A^1_{\ 1} + A^2_{\ 2} + A^3_{\ 3}$$

Ізі скаляр болатынын түрлену заңынан көреміз:

$$A'^i_{\ i} = \frac{\partial x'^i}{\partial x^l}\frac{\partial x^m}{\partial x'^i} A^l_{\ m} = \delta^m_l A^l_{\ m} = A^l_{\ l}$$

- Әр жиыру рангті екіге кемітеді: $A^{ik}_{\ \ l}$ (3 ранг) → $A^{ik}_{\ \ k}$ — вектор; $A^{ik}_{\ \ ik}$ — скаляр.
- Скаляр көбейтінді $A^i B_i$ — $A^i B_k$ тензорлық көбейтіндісін жиыру.
- Екі жоғарғы индексті тікелей жиыруға болмайды: алдымен метрикамен бір индексті түсіру керек, $g_{ik}A^{ik}$.

Мысалдар

Вектордың квадраты:

$$A^i A_i = g_{ik} A^i A^k$$

4-импульстің квадраты — масса:

$$p^i p_i = m^2 c^2$$

Тензордың вектормен жиырылуы:

$$C^i = A^{ik} B_k$$

Электромагниттік өрістің инварианты:

$$F_{ik} F^{ik} = 2(H^2 - E^2)$$

Әр жиыру тензор рангін екіге кемітеді.

Бөлу теоремасы

Шаманың тензор екенін түрлену заңын тікелей тексермей-ақ анықтауға болады. **Теорема:** егер кез келген B^k векторы үшін $A_{ik}B^k$ ковариантты вектор болса, онда A_{ik} — тензор.

Дәлелдеу. $C_i = A_{ik}B^k$ ковектор болғандықтан:

$$A'_{ik}B'^k = \frac{\partial x^l}{\partial x'^i} A_{lm}B^m = \frac{\partial x^l}{\partial x'^i}\frac{\partial x^m}{\partial x'^k} A_{lm}B'^k$$

B'^k кез келген болғандықтан, оның коэффициенттері тең:

$$A'_{ik} = \frac{\partial x^l}{\partial x'^i}\frac{\partial x^m}{\partial x'^k} A_{lm}$$

Бұл — дәл (2.6) түрлену заңы. Теорема кез келген рангті тензорлар үшін осылай тұжырымдалады.

Қолданыс: метрикалық тензор

$ds^2 = g_{ik}dx^i dx^k$ — скаляр, ал dx^i — кез келген вектор.

Симметриялы g_{ik} үшін бөлу теоремасының осы нұсқасынан g_{ik} ковариантты тензор болатыны шығады.

Дәл осылай: $g^{ik}g_{kl} = \delta^i_l$ болғандықтан g^{ik} — контравариантты тензор.

Ескерту: g_{ik} симметриялы болуы маңызды — антисимметриялы бөлік $dx^i dx^k$-мен жиырылғанда жойылады.

Антисимметриялы 4-тензордың құрылымы

Галилейлік жүйеде $A^{ik} = -A^{ki}$ тензорының 6 компоненті таза кеңістіктік бұрылыстарға қатысты екі үшөлшемді векторға бөлінеді: $A^{0\alpha}$ — полярлы вектор **p**, $A^{\alpha\beta}$ — аксиалды вектор **a**:

$$A^{ik} = \begin{pmatrix} 0 & p_x & p_y & p_z \\ -p_x & 0 & -a_z & a_y \\ -p_y & a_z & 0 & -a_x \\ -p_z & -a_y & a_x & 0 \end{pmatrix}$$

$$A^{ik} = (\mathbf{p}, \mathbf{a}), \qquad A_{ik} = (-\mathbf{p}, \mathbf{a})$$

- Ковариантты компоненттерге өткенде $A_{0\alpha} = -A^{0\alpha}$, ал $A_{\alpha\beta} = A^{\alpha\beta}$.
- Аксиалды вектор — антисимметриялы үшөлшемді тензорға дуалды: $a_\alpha = \frac{1}{2} e_{\alpha\beta\gamma} a_{\beta\gamma}$.

Мысал: өріс тензоры

Электромагниттік өріс тензоры:

$$F^{ik} = (-\mathbf{E}, \mathbf{H}), \quad F_{ik} = (\mathbf{E}, \mathbf{H})$$

Электр өрісі — полярлы, магнит өрісі — аксиалды вектор.

Сондықтан **E** мен **H** Лоренц түрлендірулерінде бір-біріне ауысады: олар бір 4-тензордың компоненттері.

Өріс тензоры толық 13-дәрістегідей қарастырылады.

Толық антисимметриялы бірлік тензор

e^{iklm} — кез келген екі индексінің орнын ауыстырғанда таңбасын өзгертетін 4 рангілі тензор. Нөлдік емес компоненттері тек төрт индексі де әр түрлі болғанда:

$$e^{0123} = +1, \qquad e_{0123} = -1$$

- Қалғандары (0,1,2,3) тізбегінің жұп орын алмастыруы үшін $+1$, тақ үшін -1; барлығы $4! = 24$ нөлдік емес компонент.
- Толық жиыруы:

$$e^{iklm} e_{iklm} = -24$$

e^{iklm} бұрылыстарда тензор сияқты түрленеді, бірақ шағылуда (бір немесе үш координаттың таңбасын өзгерткенде) компоненттері өзгермейді — сондықтан ол **псевдотензор**.

Қисық сызықты координаттар

Галилейліктен кез келген координаттарға түрлендіргенде якобиан $J = 1/\sqrt{-g}$ шығады, сондықтан:

$$E^{iklm} = \frac{1}{\sqrt{-g}} e^{iklm} \tag{2.13}$$

$$E_{iklm} = \sqrt{-g}\, e_{iklm} \tag{2.14}$$

Тек E^{iklm} тензор болады; e^{iklm} — жай сандар кестесі.

Дуалды тензорлар

Антисимметриялы A_{ik} тензорына дуалды псевдотензор (галилейлік жүйеде):

$$A^{*ik} = \frac{1}{2} e^{iklm} A_{lm}$$

- Дуалдау **p** мен **a** векторларын орын ауыстырады (таңба дәлдігімен): өріс тензоры үшін **E** ↔ **H**.
- $A^{ik} A^{*}_{ik}$ — псевдоскаляр; өріс үшін $F^{ik} F^{*}_{ik} \propto \mathbf{E} \cdot \mathbf{H}$.
- Дәл осылай $e^{iklm} A_m$ — A^i векторына дуалды 3 рангілі антисимметриялы псевдотензор.

e^{iklm} арқылы анықтауышты да жазуға болады ($A = \det A_{ik}$):

$$e^{prst} A_{ip} A_{kr} A_{ls} A_{mt} = -A\, e_{iklm}$$

Беттің элементі

Екі шексіз аз ығысуға құрылған беттің элементі — антисимметриялы тензор:

$$df^{ik} = dx^i dx'^k - dx^k dx'^i$$

Оның компоненттері — элемент ауданының координаттық жазықтықтардағы проекциялары.

Дуалды тензор $df^{*}_{ik} = \frac{1}{2} e_{iklm} df^{lm}$ геометриялық тұрғыдан df^{ik}-ке «ортогональ» бетті сипаттайды.

Инвариантты 4-көлем элементі

Галилейлік жүйеде $d\Omega' = dx'^0 dx'^1 dx'^2 dx'^3$ скаляр сияқты әрекет етеді. Қисық сызықты координаттарға өткенде:

$$d\Omega' = J\, d\Omega, \qquad J = \frac{\partial(x'^0, x'^1, x'^2, x'^3)}{\partial(x^0, x^1, x^2, x^3)}$$

g_{ik}-ның түрлену заңынан анықтауыштарды теңестірсек: $g = -J^2$, яғни $J = \sqrt{-g}$. Сонымен, инвариант:

$$\sqrt{-g}\, d\Omega = \text{inv}$$

- Скаляр өрістің кеңістік-уақыт бойынша интегралы $\int \varphi \sqrt{-g}\, d\Omega$ инвариант (әсерді жазғанда қажет).
- $\sqrt{-g}\, \varphi$ сияқты шамалар скаляр тығыздық деп аталады.
- Гаусс теоремасы: $\oint A^i \sqrt{-g}\, dS_i = \int \frac{\partial(\sqrt{-g} A^i)}{\partial x^i} d\Omega$ (5-дәріс).

Мысал: сфералық координаттар

3-дәрістен $g = -r^4 \sin^2\theta$, сондықтан:

$$\sqrt{-g} = r^2 \sin\theta$$

Инвариантты элемент:

$$\sqrt{-g}\, d\Omega = r^2 \sin\theta\, c\, dt\, dr\, d\theta\, d\varphi$$

Уақыттың $c\, dt$ көбейткішін алып тастасақ, сфералық координаттардағы белгілі көлем элементі қалады.

Қорытынды

- Контравариантты векторлар V кеңістігіне, ковариантты векторлар (ковекторлар) дуалдық V^* кеңістігіне жатады; $\omega_i A^i$ метрикасыз анықталады.
- Метрика V пен V^* арасында сәйкестік орнатады: индекстерді түсіру және көтеру.
- Тензорлық алгебра: сызықтық комбинация, тензорлық көбейтінді (рангтер қосылады), жиыру (ранг 2-ге кемиді).
- Бөлу теоремасы: $A_{ik}B^k$ кез келген B^k үшін вектор болса, A_{ik} — тензор.
- Қисық сызықты координаттарда $E^{iklm} = e^{iklm}/\sqrt{-g}$; инвариантты көлем элементі $\sqrt{-g}\,d\Omega$.

Негізгі формулалар

$$\mathbf{e}^i(\mathbf{e}_k) = \delta^i_k, \quad \omega(\mathbf{A}) = \omega_i A^i$$

$$A_i = g_{ik}A^k, \quad g^{ik}g_{ik} = 4$$

$$E^{iklm} = \frac{1}{\sqrt{-g}}\,e^{iklm}$$

$$\sqrt{-g}\,d\Omega = \text{inv}$$

Келесі дәріс: тензорлар III — дифференциалдау, ковариантты туынды, байланыс.

Пайдаланылған әдебиеттер

1. Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М. Теориялық физика. II том: Өріс теориясы: оқулық / ауд. Т.Ә. Қожамқұлов, Н. Қойшыбаев. – Алматы: Қазақ университеті, 2009. – 563 б.
2. Бейсен Н.Ә. Электродинамика. – Алматы: Қазақ университеті, 2010.
3. Мармо С.И., Фролов М.В. Лекции по электродинамике, ч. 1–2. – Воронеж: ИПЦ ВГУ, 2009.
4. Топтыгин И.Н. Современная электродинамика. – Москва–Ижевск: ИКИ, 2002.
5. Матвеев А.Н. Электродинамика и теория относительности. – Москва: Высшая школа, 1985.
6. Джексон Дж. Классическая электродинамика. – Москва: Мир, 1988.
7. Griffiths D.J. Introduction to Electrodynamics. – New Jersey: Addison-Wesley, 2013.
8. Гречко Л.Г., Сугаков В.И., Томасевич О.Ф., Федорченко А.М. Задачи по теоретической физике. – Мир, 1997.
9. Батыгин В.В., Топтыгин И.Н. Сборник задач по электродинамике. – Москва: НИЦ, 2002.