Дәріс 5

Тензорлар III: дифференциалдау, ковариантты туынды, байланыс

Қауымдастырылған профессор
Уразалина Айнур Адилхановна

Дәріс мақсаты

Дәрістің мақсаты: қисық сызықты координаттарда тензорды дифференциалдаудың ковариантты әдісін құру: параллель тасымалдау, байланыс коэффициенттері (Кристоффель символдары) және ковариантты туынды.

Кристоффель символдарын метрикалық тензор арқылы өрнектеу, олардың симметриясын эквиваленттілік принципінен шығару, жергілікті-геодезиялық жүйені енгізу.

Дивергенция, ротор және Даламбер операторын кез келген координаттарда жазу.

Дәріс жоспары

- Мәселе: $\partial A_i/\partial x^k$ тензор емес
- Параллель тасымалдау
- Кристоффель символдары
- Векторлардың ковариантты туындысы
- Тензорлардың ковариантты туындысы
- Г түрленуі, бұралу тензоры
- Жергілікті-геодезиялық жүйе
- Г мен g_{ik} байланысы
- Дивергенция, ротор, Даламбер операторы

Мәселе: дифференциал вектор емес

Галилейлік координаттарда dA_i — вектор, $\partial A_i/\partial x^k$ — тензор. Қисық сызықты координаттарда $A_i = \frac{\partial x'^k}{\partial x^i} A'_k$ болғандықтан:

$$dA_i = \frac{\partial x'^k}{\partial x^i} dA'_k + A'_k \frac{\partial^2 x'^k}{\partial x^i \partial x^l} dx^l$$

- Екінші мүше артық: dA_i вектор сияқты түрленбейді. Ол тек x'^k x^k-тің сызықты функциясы болғанда жоғалады.
- **Себебі:** dA_i — шексіз жақын, бірақ **әр түрлі нүктелердегі** векторлардың айырмасы. Векторлар әр нүктеде әр түрлі түрленеді (коэффициенттер — координаттардың функциялары).
- **Шешім:** векторларды салыстыру үшін алдымен біреуін екіншісі тұрған нүктеге «тасымалдау» керек. Тасымалдау галилейлік координаттарда компоненттерді өзгертпеуі тиіс — бұл **параллель тасымалдау**.

Қарапайым мысал

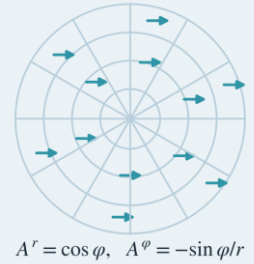
Жазықтықта тұрақты $\mathbf{A} = \hat{\mathbf{x}}$ векторын полярлық координаттарда жазайық:

$$A^r = \cos\varphi, \quad A^\varphi = -\frac{\sin\varphi}{r}$$

Вектор барлық жерде бірдей, бірақ компоненттерінің туындылары нөлге тең емес:

$$\frac{\partial A^r}{\partial \varphi} = -\sin\varphi \neq 0$$

Жай туындылар координат торының қисықтығын да «сезеді».



Тұрақты вектор: полярлық компоненттері нүктеден нүктеге өзгереді, яғни жай туындысы нөлге тең емес.

Параллель тасымалдау

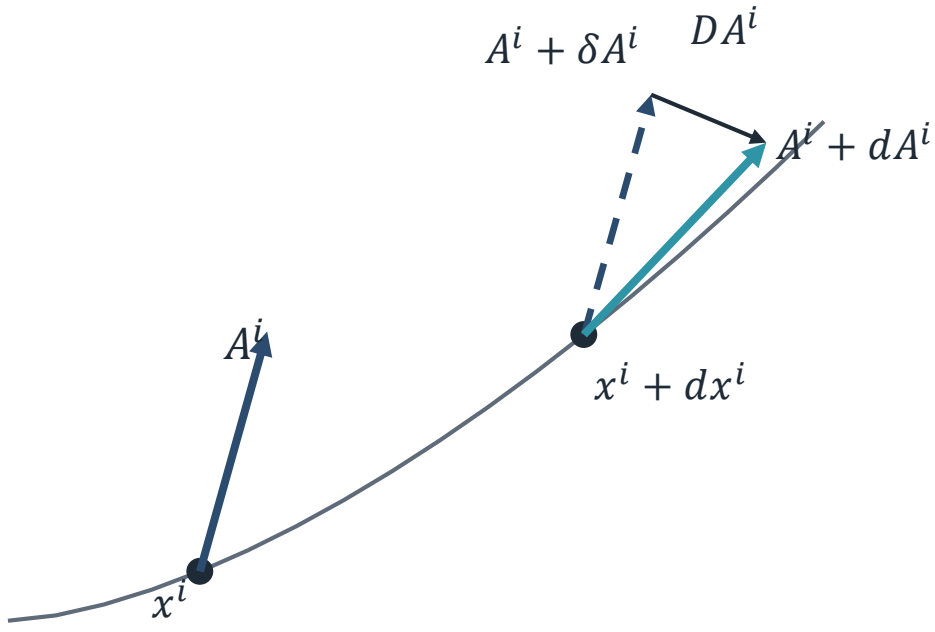
x^i нүктесіндегі вектор A^i, көршілес $x^i + dx^i$ нүктесінде — $A^i + dA^i$. A^i векторын $x^i + dx^i$ нүктесіне параллель тасымалдағандағы өзгерісін δA^i деп белгілейміз. Бір нүктедегі екі вектордың айырмасы:

$$DA^i = dA^i - \delta A^i \qquad (5.1)$$

δA^i компоненттердің өздеріне сызықты тәуелді (екі вектордың қосындысы да вектор), және dx^l-ге пропорционал:

$$\delta A^i = -\Gamma^i_{kl} A^k dx^l \qquad (5.2)$$

- Γ^i_{kl} — координаттардың функциялары: **байланыс коэффициенттері** немесе **Кристоффель символдары.**
- Галилейлік жүйеде $\Gamma^i_{kl} = 0$. Сондықтан Γ^i_{kl} тензор емес: бір жүйеде нөлге тең тензор барлық жүйеде нөлге тең болар еді.



1-сурет. Үзік сызық — параллель тасымалданған вектор; DA^i — бір нүктедегі векторлардың айырмасы.

Векторлардың ковариантты туындысы

Параллель тасымалдауда скалярлар өзгермейді: $\delta(A_i B^i) = 0$. Осыдан ковариантты вектордың өзгерісі:

$$\delta A_i = \Gamma^k_{il} A_k dx^l \qquad (5.5)$$

(5.1)-ге қойып, $DA^i = A^i_{;l} dx^l$ деп жазсақ, **ковариантты туындылар:**

$$A^i_{;k} = \frac{\partial A^i}{\partial x^k} + \Gamma^i_{lk} A^l \qquad (5.9)$$

$$A_{i;k} = \frac{\partial A_i}{\partial x^k} - \Gamma^l_{ik} A_l \qquad (5.10)$$

$A^i_{;k} dx^k$ кез келген dx^k үшін вектор, сондықтан бөлу теоремасы бойынша $A^i_{;k}$ — тензор. Галилейлік жүйеде ол жай туындыға айналады.

(5.5)-тің қорытылуы

$\delta(A_i B^i) = B^i \delta A_i + A_i \delta B^i = 0$, яғни:

$$B^i \delta A_i = -A_k \delta B^k = \Gamma^k_{il} B^i A_k dx^l$$

B^i кез келген болғандықтан, (5.5) шығады.

Белгілеу: ковариантты туынды үтірлі нүктемен, жай туынды үтірмен жазылады:

$$A_{i,k} \equiv \frac{\partial A_i}{\partial x^k}$$

Тензорлардың ковариантты туындысы

A^iB^k көбейтіндісінің параллель тасымалдаудағы өзгерісінен, сызықтықтың арқасында, кез келген A^{ik} үшін:

$$A^{ik}_{\ ;l} = \frac{\partial A^{ik}}{\partial x^l} + \Gamma^i_{ml}A^{mk} + \Gamma^k_{ml}A^{im} \qquad (5.12)$$

$$A^i_{\ k;l} = \frac{\partial A^i_{\ k}}{\partial x^l} - \Gamma^m_{kl}A^i_{\ m} + \Gamma^i_{ml}A^m_{\ k} \qquad (5.13)$$

$$A_{ik;l} = \frac{\partial A_{ik}}{\partial x^l} - \Gamma^m_{il}A_{mk} - \Gamma^m_{kl}A_{im} \qquad (5.14)$$

Жалпы ереже

Жай туындыға әр контравариантты индекс үшін $+\Gamma^i_{kl}A^k$, әр ковариантты индекс үшін $-\Gamma^k_{il}A_k$ мүшесін қосамыз.

Қасиеттері

Скалярдың ковариантты туындысы — жай туынды:

$$\varphi_{;k} = \frac{\partial \varphi}{\partial x^k}$$

Көбейтіндіні дифференциалдау ережесі сақталады:

$$(A_iB_k)_{;l} = A_{i;l}B_k + A_iB_{k;l}$$

Жиыру мен ковариантты дифференциалдаудың реті маңызды емес.

Индексті көтеріп, контравариантты туынды аламыз: $A_i^{\ ;k} = g^{kl}A_{i;l}$.

Кристоффель символдарының түрленуі. Бұралу тензоры

Ковариантты туындының тензор болу талабынан Γ-ның түрлену заңы шығады:

$$\Gamma'^{i}_{kl} = \frac{\partial x^i}{\partial x'^m}\frac{\partial x'^n}{\partial x^k}\frac{\partial x'^p}{\partial x^l}\Gamma'^{m}_{np} + \frac{\partial^2 x'^m}{\partial x^k \partial x^l}\frac{\partial x^i}{\partial x'^m} \tag{5.15}$$

- Бірінші мүше — 3 рангілі тензордың заңы; екінші мүше тек сызықты түрлендірулерде жоғалады.
- Бірақ екінші мүше k, l бойынша **симметриялы**, сондықтан айырмада ол жойылады:

$$S^i_{kl} = \Gamma^i_{kl} - \Gamma^i_{lk}$$

S^i_{kl} — тензор (**бұралу тензоры**). Эквиваленттілік принципі бойынша нүктеде барлық $\Gamma = 0$ болатын жүйе бар; онда $S = 0$, демек барлық жүйеде $S = 0$.

Салдары: симметрия

$$\Gamma^i_{kl} = \Gamma^i_{lk} \tag{5.16}$$

Тәуелсіз компоненттер саны: i үшін 4 мән × (k, l) жұптары үшін 10 мән = **40**.

Төменгі индекстері бар символдар: $\Gamma_{i,kl} = g_{im}\Gamma^m_{kl}$ (5.3), олар да k, l бойынша симметриялы.

Жергілікті-геодезиялық (жергілікті-инерциалдық) жүйе

Берілген нүктені координаттар басы етіп алайық; онда Γ^i_{kl} мәні $\left(\Gamma^i_{kl}\right)_0$ болсын. Түрлендіру жасаймыз:

$$x'^i = x^i + \frac{1}{2}\left(\Gamma^i_{kl}\right)_0 x^k x^l \qquad (5.18)$$

Сонда басталу нүктесінде:

$$\left(\frac{\partial^2 x'^m}{\partial x^k \partial x^l}\frac{\partial x^i}{\partial x'^m}\right)_0 = \left(\Gamma^i_{kl}\right)_0 \qquad (5.19)$$

- (5.15) бойынша жаңа жүйеде барлық $\Gamma'^i_{kl} = 0$. (5.19)-дың сол жағы k, l бойынша симметриялы — сондықтан (5.16) шарты қажет.
- $\left(\partial x'^i/\partial x^k\right)_0 = \delta^i_k$: тензорлардың мәндері өзгермейді, сондықтан бір мезгілде g_{ik}-ды да галилейлік түрге келтіруге болады.

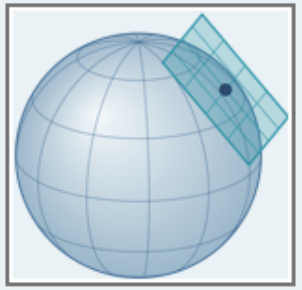
Физикалық мағынасы

Нүктеде $\Gamma = 0$ және g_{ik} галилейлік: бұл — нүкте маңында гравитациялық өрісті жою, яғни **эквиваленттілік принципі**.

Төменде көретініміздей, $\Gamma = 0$ дегеніміз g_{ik}-ның барлық бірінші туындылары нөлге тең.

Екінші туындыларды жою мүмкін емес — олар қисықтықты анықтайды (7–8-дәрістер).

Мұндай жүйені тек нүктеде емес, бүкіл әлемдік сызық бойында да таңдауға болады.



Берілген P нүктесінде $\Gamma^{i}_{kl} = 0$ болатын жергілікті-геодезиялық жүйе таңдауға болады.

Кристоффель символдары және метрика

$DA_i = g_{ik}DA^k$ кез келген вектор үшін, ал екінші жағынан $DA_i = D\left(g_{ik}A^k\right) = g_{ik}DA^k + A^k Dg_{ik}$. Демек:

$$g_{ik;l} = 0 \qquad (5.20)$$

Ковариантты дифференциалдауда g_{ik} тұрақты сияқты. (5.14)-ті g_{ik}-ға қолданып, индекстерді алмастырып, жарты қосындысын алсақ:

$$\Gamma_{i,kl} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial g_{ik}}{\partial x^l} + \frac{\partial g_{il}}{\partial x^k} - \frac{\partial g_{kl}}{\partial x^i}\right) \qquad (5.21)$$

$$\Gamma^i_{kl} = \frac{1}{2}g^{im}\left(\frac{\partial g_{mk}}{\partial x^l} + \frac{\partial g_{ml}}{\partial x^k} - \frac{\partial g_{kl}}{\partial x^m}\right) \qquad (5.23)$$

Байланыс метрикамен толық анықталады; $\Gamma = 0 \Leftrightarrow$ барлық $\partial g_{ik}/\partial x^l = 0$.

Қорытылуы

(5.14) бойынша:

$$\frac{\partial g_{ik}}{\partial x^l} = \Gamma_{k,il} + \Gamma_{i,kl}$$

5декстерді циклдік алмастырамыз:

$$\frac{\partial g_{li}}{\partial x^k} = \Gamma_{i,kl} + \Gamma_{l,ik}$$

$$\frac{\partial g_{kl}}{\partial x^i} = \Gamma_{l,ik} + \Gamma_{k,il}$$

Алғашқы екеуін қосып, үшіншісін азайтсақ ($\Gamma_{i,kl} = \Gamma_{i,lk}$), (5.21) шығады.

Мысал: полярлық координаттар

$dl^2 = dr^2 + r^2 d\varphi^2$: $g_{rr} = 1$, $g_{\varphi\varphi} = 5$. (5.22) бойынша нөлдік емес символдар:

$$\Gamma^r_{\varphi\varphi} = -\frac{1}{2}\frac{\partial g_{\varphi\varphi}}{\partial r} = -r, \qquad \Gamma^\varphi_{r\varphi} = \Gamma^\varphi_{\varphi r} = \frac{1}{r}$$

Тексеру: тұрақты $\mathbf{A} = \hat{\mathbf{x}}$ векторы үшін ($A^r = \cos\varphi$, $A^\varphi = -\sin\varphi/r$) ковариантты туынды нөлге тең болуы керек:

$$A^r_{;\varphi} = \frac{\partial A^r}{\partial \varphi} + \Gamma^r_{\varphi\varphi} A^\varphi = -\sin\varphi + (-r)\left(-\frac{\sin\varphi}{r}\right) = 0$$

$$A^\varphi_{;\varphi} = \frac{\partial A^\varphi}{\partial \varphi} + \Gamma^\varphi_{r\varphi} A^r = -\frac{\cos\varphi}{r} + \frac{1}{r}\cos\varphi = 0$$

Жай туындылар нөлге тең емес, бірақ ковариантты туындылар нөлге тең: вектор шынында тұрақты, ал компоненттердің өзгерісі тек базистің өзгерісінен.

Геометриялық мағынасы

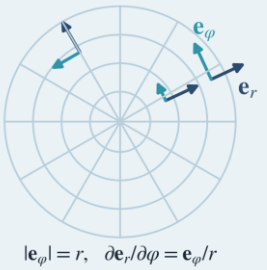
Базистік векторлардың туындылары Кристоффель символдарын береді:

$$\frac{\partial \mathbf{e}_k}{\partial x^l} = \Gamma^i_{kl}\mathbf{e}_i$$

Мысалы:

$$\frac{\partial \mathbf{e}_\varphi}{\partial \varphi} = -r\,\mathbf{e}_r, \quad \frac{\partial \mathbf{e}_r}{\partial \varphi} = \frac{1}{r}\mathbf{e}_\varphi$$

Ковариантты туынды компоненттің өзгерісін де, базистің өзгерісін де ескереді.



Полярлық координаттардағы базис векторлары нүктеден нүктеге өзгереді; Кристоффель символдары осы өзгерісті сипаттайды.

Жиырылған символ және дивергенция

Анықтауыштың дифференциалы $dg = g\, g^{ik} dg_{ik}$ (5.23). (5.22)-ті жиырсақ, үшінші және бірінші мүшелер қысқарады:

$$\Gamma^i_{ki} = \frac{1}{2g}\frac{\partial g}{\partial x^k} = \frac{\partial \ln\sqrt{-g}}{\partial x^k} \qquad (5.24)$$

Вектордың дивергенциясы кез келген координаттарда:

$$A^i_{;i} = \frac{1}{\sqrt{-g}}\frac{\partial\left(\sqrt{-g}A^i\right)}{\partial x^i} \qquad (5.28)$$

Антисимметриялы тензор үшін ($\Gamma^i_{km}A^{km} = 0$):

$$A^{ik}_{;k} = \frac{1}{\sqrt{-g}}\frac{\partial\left(\sqrt{-g}A^{ik}\right)}{\partial x^k} \qquad (5.29)$$

Мысал

Полярлық координаттарда $\sqrt{g} = r$:

$$\Gamma^i_{ri} = \frac{1}{r}, \qquad \Gamma^i_{\varphi i} = 0$$

Дивергенция:

$$A^i_{;i} = \frac{1}{r}\frac{\partial(rA^r)}{\partial r} + \frac{\partial A^\varphi}{\partial \varphi}$$

Бұл Γ арқылы тікелей есептеумен сәйкес: $A^i_{;i} = \partial_i A^i + \Gamma^i_{ki}A^k$.

(Евклидтік жазықтықта $-g$ орнына g алынады.)

Ротор, Даламбер операторы және Гаусс теоремасы

Ротор. Γ^l_{ik} симметриялы болғандықтан, антисимметриялы комбинацияда символдар қысқарады:

$$A_{i;k} - A_{k;i} = \frac{\partial A_i}{\partial x^k} - \frac{\partial A_k}{\partial x^i} \qquad (5.31)$$

Д5амбер операторы. $\varphi_{;i} = \partial\varphi/\partial x^i$, индексті көтеріп (5.28)-ды қолдансақ:

$$\varphi^{;i}_{\ ;i} = \frac{1}{\sqrt{-g}}\frac{\partial}{\partial x^i}\left(\sqrt{-g}\, g^{ik}\frac{\partial\varphi}{\partial x^k}\right) \qquad (5.32)$$

Гаусс теоремасы қисық сызықты координаттарда:

$$\oint A^i\sqrt{-g}\, dS_i = \int A^i_{\ ;i}\sqrt{-g}\, d\Omega \qquad (5.33)$$

Мысал: сфералық координаттар

$\sqrt{-g} = r^2\sin\theta$, $g^{ik} = \mathrm{diag}\left(1, -1, -\frac{1}{r^2}, -\frac{1}{r^2\sin^2\theta}\right)$. (5.32):

$$\varphi^{;i}_{\ ;i} = \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\varphi}{\partial t^2} - \Delta\varphi$$

мұндағы белгілі Лаплас операторы:

$$\Delta\varphi = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial\varphi}{\partial r}\right) + \cdots$$

Бұрыштық мүшелер дәл осылай $g^{\theta\theta}$, $g^{\varphi\varphi}$-ден шығады.

Қорытынды

- Қисық сызықты координаттарда $\partial A_i/\partial x^k$ тензор емес; векторларды салыстыру үшін параллель тасымалдау қажет.
- Параллель тасымалдау $\delta A^i = -\Gamma^i_{kl} A^k dx^l$; Γ^i_{kl} — байланыс, тензор емес.
- Ковариантты туынды — тензор: жоғарғы индекс үшін $+\Gamma$, төменгі индекс үшін $-\Gamma$.
- Эквиваленттілік принципі ⇒ бұралу жоқ, $\Gamma^i_{kl} = \Gamma^i_{lk}$; нүктеде $\Gamma = 0$ болатын жергілікті-геодезиялық жүйе бар.
- $g_{ik;l} = 0$ ⇒ Кристоффель символдары метрика арқылы өрнектеледі.
- Дивергенция $\frac{1}{\sqrt{-g}}\partial_i\left(\sqrt{-g}A^i\right)$; ротор — жай туындылармен.

Негізгі формулалар

$$A^i_{;k} = \frac{\partial A^i}{\partial x^k} + \Gamma^i_{lk} A^l$$

$$A_{i;k} = \frac{\partial A_i}{\partial x^k} - \Gamma^l_{ik} A_l$$

$$\Gamma^i_{kl} = \frac{1}{2} g^{im}\left(g_{mk,l} + g_{ml,k} - g_{kl,m}\right)$$

$$g_{ik;l} = 0, \quad \Gamma^i_{ki} = \partial_k \ln\sqrt{-g}$$

Келесі дәріс: тензорлар IV — геодезия және вариациялық принцип.

Пайдаланылған әдебиеттер

1. Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М. Теориялық физика. II том: Өріс теориясы: оқулық / ауд. Т.Ә. Қожамқұлов, Н. Қойшыбаев. – Алматы: Қазақ университеті, 2009. – 563 б.
2. Бейсен Н.Ә. Электродинамика. – Алматы: Қазақ университеті, 2010.
3. Мармо С.И., Фролов М.В. Лекции по электродинамике, ч. 1–2. – Воронеж: ИПЦ ВГУ, 2009.
4. Топтыгин И.Н. Современная электродинамика. – Москва–Ижевск: ИКИ, 2002.
5. Матвеев А.Н. Электродинамика и теория относительности. – Москва: Высшая школа, 1985.
6. Джексон Дж. Классическая электродинамика. – Москва: Мир, 1988.
7. Griffiths D.J. Introduction to Electrodynamics. – New Jersey: Addison-Wesley, 2013.
8. Гречко Л.Г., Сугаков В.И., Томасевич О.Ф., Федорченко А.М. Задачи по теоретической физике. – Мир, 1997.
9. Батыгин В.В., Топтыгин И.Н. Сборник задач по электродинамике. – Москва: НИЦ, 2002.