Дәріс 9

Эйнштейн өріс теңдеулері: энергия-импульс тензоры

Қауымдастырылған профессор
Уразалина Айнур Адилхановна

Дәріс мақсаты

Дәрістің мақсаты: гравитациялық өрістің көзі — энергия-импульс тензорын — қисық кеңістік-уақытта анықтау және ең кіші әсер принципінен Эйнштейн өріс теңдеулерін қорыту.

Энергия-импульс тензорының физикалық мағынасы, макроскоптық денелер мен электромагниттік өріс үшін түрі, оның метрика бойынша вариация арқылы анықтамасы.

Гравитациялық өріс әсері, Эйнштейн теңдеулерінің құрылымы мен қасиеттері: сызықсыздық, қозғалыс теңдеулерінің өріс теңдеулеріне енуі, бастапқы шарттар.

Дәріс жоспары

- АСТ-дағы энергия-импульс тензоры
- Макроскоптық денелер және өріс
- Қисық кеңістік-уақытта T^{ik}
- Метрикалық анықтама
- Өріс теңдеулеріне қойылатын талаптар
- Гравитациялық өріс әсері
- Эйнштейн теңдеулері
- Теңдеулердің қасиеттері
- Белгісіздер саны, бастапқы шарттар

Энергия-импульс тензоры: АСТ-дан еске түсіру

Физикалық жүйенің энергия мен импульсінің тығыздықтары мен ағындары бір симметриялы тензорға біріктіріледі:

$$T^{ik} = \begin{pmatrix} W & S_x/c & S_y/c & S_z/c \\ S_x/c & \sigma_{xx} & \sigma_{xy} & \sigma_{xz} \\ S_y/c & \sigma_{yx} & \sigma_{yy} & \sigma_{yz} \\ S_z/c & \sigma_{zx} & \sigma_{zy} & \sigma_{zz} \end{pmatrix}$$

- $W = T^{00}$ — энергия тығыздығы; $\mathbf{S}$ — энергия ағынының тығыздығы; $\mathbf{S}/c^2$ — импульс тығыздығы.
- $\sigma_{\alpha\beta}$ — импульс ағынының тығыздығы (кернеулер тензоры).

Галилейлік координаттарда сақталу заңы:

$$\frac{\partial T^{ik}}{\partial x^k} = 0$$

Неге тензор?

$i = 0$ үшін сақталу заңы — энергияның үздіксіздік теңдеуі:

$$\frac{\partial W}{\partial t} + \operatorname{div} \mathbf{S} = 0$$

$i = \alpha$ үшін — импульстің сақталуы.

Энергия мен импульс бір 4-вектордың компоненттері болғандықтан, олардың тығыздықтары мен ағындары бір 4-тензор құрайды.

Импульс моментінің сақталуы T^{ik}-ның симметриялы болуын талап етеді.

Макроскоптық денелер және электромагниттік өріс

Гравитациялық өрісті тек үлкен массалы денелер тудырады, сондықтан негізгі мысал — макроскоптық дене (идеал сұйық):

$$T_{ik} = (p + \varepsilon)u_i u_k - p g_{ik} \qquad (9.1)$$

ε — энергия тығыздығы, p — қысым (дененің меншікті санақ жүйесінде). Сол жүйеде:

$$T_i^k = \mathrm{diag}(\varepsilon, -p, -p, -p), \qquad T = T_i^i = \varepsilon - 3p$$

- Шаң тәрізді зат ($p = 0$): $T_{ik} = \mu c^2 u_i u_k$ — гравитацияның ньютондық көзі.
- Ультрарелятивистік зат немесе сәулелену: $p = \varepsilon/3$, $T = 0$.
- Әрқашан $T_{00} \geq 0$ (9.2): энергия тығыздығы теріс бола алмайды.

Электромагниттік өріс

Қисық сызықты координаттарда:

$$T_{ik} = \frac{1}{4\pi}\left(-F_{il}F_k^{\,l} + \frac{1}{4}F_{lm}F^{lm}g_{ik}\right) \qquad (9.3)$$

Оның ізі нөлге тең:

$$T = T_i^i = 0$$

Сәулелену сияқты, өріс те $T = 0$ шартын қанағаттандырады.



Макроскоптық денелер үшін $0 \leq p \leq \varepsilon/3$.

Қисық кеңістік-уақыттағы энергия-импульс тензоры

Гравитациялық өрісте жай туындыларды ковариантты туындылармен алмастырамыз — сақталу заңы мына түрге келеді:

$$T^{k}_{i;k} = 0 \qquad (9.4)$$

(8.30) бойынша симметриялы тензор үшін бұл:

$$\frac{1}{\sqrt{-g}}\frac{\partial\left(\sqrt{-g}\,T^{k}_{i}\right)}{\partial x^{k}} - \frac{1}{2}\frac{\partial g_{kl}}{\partial x^{i}}T^{kl} = 0$$

- Екінші мүшенің салдарынан (9.4) интегралдық сақталу заңын бермейді: энергия-импульс материя мен гравитациялық өріс арасында алмасады.
- Екінші мүше — материяға әсер ететін гравитациялық «күш». Ньютондық шекте ол $-\mu\nabla\varphi$ береді.

Мысал: шаң

$T^{ik} = \mu c^2 u^i u^k$ болса, (9.4) мынаны береді:

$$\left(\mu u^{k}\right)_{;k} u^{i} + \mu u^{k} u^{i}_{;k} = 0$$

u_i-ға көбейтсек ($u_i u^{i}_{;k} = 0$): массаның сақталуы $\left(\mu u^{k}\right)_{;k} = 0$.

Онда қалғаны:

$$u^{k} u^{i}_{;k} = \frac{Du^{i}}{ds} = 0$$

Шаң бөлшектері геодезиялар бойымен қозғалады!

Энергия-импульс тензорының метрикалық анықтамасы

Материя әсері $S_m = \frac{1}{c}\int \Lambda\sqrt{-g}\, d\Omega$. Метриканы вариацияласақ (материя теңдеулері орындалғанда):

$$\delta S_m = \frac{1}{2c}\int T_{ik}\delta g^{ik}\sqrt{-g}\, d\Omega \qquad (9.5)$$

мұндағы

$$\frac{1}{2}\sqrt{-g}\, T_{ik} = \frac{\partial\left(\sqrt{-g}\Lambda\right)}{\partial g^{ik}} - \frac{\partial}{\partial x^l}\frac{\partial\left(\sqrt{-g}\Lambda\right)}{\partial\left(\partial g^{ik}/\partial x^l\right)} \qquad (9.6)$$

- Бұл анықтама T_{ik}-ны бірден **симметриялы** түрде береді (g^{ik} симметриялы).
- Ол гравитациялық өріс жоқ кезде де ыңғайлы: қисық сызықты координаттарға өту — тек аралық саты.

Сақталу заңы неден шығады?

Шексіз аз координаттар түрлендіруі $x'^i = x^i + \xi^i$ метриканы өзгертеді:

$$\delta g^{ik} = \xi^{i;k} + \xi^{k;i}$$

Әсер скаляр — өзгермейді, яғни $\delta S_m = 0$. (9.5)-ке қойып, бөліктеп интегралдасақ:

$$\int T^k_{i;k}\xi^i\sqrt{-g}\, d\Omega = 0$$

ξ^i кез келген ⇒ (9.4).

Өріс теңдеулеріне қойылатын талаптар

- **Тензорлық:** теңдеулер кез келген координаттарда бірдей түрде жазылуы тиіс.
- **Көзі:** ньютондық теорияда өрістің көзі — масса тығыздығы μ, ал релятивистік теорияда — T_{00} бар симметриялы T_{ik}.
- **Екінші ретті:** электромагниттік өрістегідей, теңдеулерге «потенциалдардың» (g_{ik}) екінші туындыларынан жоғары туындылар кірмеуі тиіс.
- **Сәйкестік:** сол жағының дивергенциясы, T_{ik} сияқты, тепе-тең нөлге тең болуы керек.
- **Шек:** әлсіз өрісте Пуассон теңдеуіне $\Delta\varphi = 4\pi k\mu$ өтуі тиіс.

Тензорлық	Көзі — T_{ik}	Екінші ретті теңдеулер	Сәйкестік: $T^{k}{}_{i;k} = 0$	**Шек:** $\Delta\varphi = 4\pi\mu$

Жауап

Бұл талаптарды қанағаттандыратын, g_{ik}-ның екінші туындыларына сызықты симметриялы тензор (тұрақтыға дейін):

$$G_{ik} = R_{ik} - \frac{1}{2} g_{ik} R$$

8-дәрістегі Эйнштейн тензоры. Сондықтан:

$$R_{ik} - \frac{1}{2} g_{ik} R = \varkappa T_{ik}$$

Тұрақты $\varkappa$ Ньютон шегінен анықталады. Ландау бұл теңдеулерді әсерден қорытады (келесі слайд).

Гравитациялық өріс әсері

Әсердің интеграл астындағы өрнегіне g_{ik}-ның бірінші туындыларынан жоғары туындылар кірмеуі керек. Бірақ тек g_{ik} пен Γ-дан скаляр құру мүмкін емес — Γ нүктеде нөлге айналады. R скалярына екінші туындылар **сызықты** кіреді, сондықтан ол жарайды:

$$S_g = -\frac{c^3}{16\pi k}\int R\sqrt{-g}\,d\Omega \qquad (9.7)$$

$\int R\sqrt{-g}\,d\Omega = \int G\sqrt{-g}\,d\Omega + \int \frac{\partial(\sqrt{-g}w^i)}{\partial x^i}d\Omega$: екінші интеграл шекара бойынша интегралға айналады да, вариацияда жоғалады; G-ға тек бірінші туындылар кіреді:

$$G = g^{ik}\left(\Gamma^m_{il}\Gamma^l_{km} - \Gamma^l_{ik}\Gamma^m_{lm}\right) \qquad (9.9)$$

$k = 6{,}67\cdot 10^{-8}\ см^3 г^{-1} с^{-2}$ — гравитациялық тұрақты (9.8). Оның оң болуы әсердің минимумы болуын қамтамасыз етеді.

Электродинамикамен салыстыру

Электромагниттік өріс әсері:

$$S_f = -\frac{1}{16\pi c}\int F_{ik}F^{ik}\,d\Omega$$

өріс кернеулігінің — потенциалдың бірінші туындыларының — квадраты.

Гравитацияда G — Γ-ның квадраттары, яғни «потенциалдардың» (g_{ik}) бірінші туындыларының квадраттары. Ұқсастық толық.

Әсерді вариациялау

$\delta(S_g + S_m) = 0$, мұнда g^{ik} вариацияланады. $R = g^{ik}R_{ik}$ болғандықтан:

$$\delta(\sqrt{-g}R) = \sqrt{-g}\left(R_{ik}\delta g^{ik} + g^{ik}\delta R_{ik}\right) + R\,\delta\sqrt{-g}$$

Анықтауыштың вариациясы (5.23) бойынша:

$$\delta\sqrt{-g} = -\frac{1}{2}\sqrt{-g}\,g_{ik}\delta g^{ik}$$

$\delta\Gamma^i_{kl}$ — тензор (екі параллель тасымалдаудың айырмасы). Жергілікті-геодезиялық жүйеде $g^{ik}\delta R_{ik} = \partial w^l/\partial x^l$, сондықтан $\sqrt{-g}g^{ik}\delta R_{ik}$ — толық дивергенция және ол вариацияға үлес қоспайды:

$$\delta S_g = -\frac{c^3}{16\pi k}\int\left(R_{ik} - \frac{1}{2}g_{ik}R\right)\delta g^{ik}\sqrt{-g}\,d\Omega \qquad (9.10)$$

Нәтиже

(9.10) мен (9.5)-ті қоссақ:

$$-\frac{c^3}{16\pi k}\int\left(R_{ik} - \frac{1}{2}g_{ik}R\right.$$

Эйнштейн теңдеулері

$$R_{ik} - \frac{1}{2} g_{ik} R = \frac{8\pi k}{c^4} T_{ik} \qquad (9.11)$$

Аралас компоненттерде:

$$R_i^k - \frac{1}{2} \delta_i^k R = \frac{8\pi k}{c^4} T_i^k \qquad (9.12)$$

i, k бойынша жиырсақ ($T = T_i^i$):

$$R = -\frac{8\pi k}{c^4} T \qquad (9.13)$$

Сондықтан баламалы түрі:

$$R_{ik} = \frac{8\pi k}{c^4} \left(T_{ik} - \frac{1}{2} g_{ik} T \right) \qquad (9.14)$$

Эйнштейндік тұрақты

$$\varkappa = \frac{8\pi k}{c^4} \approx 2{,}07 \cdot 10^{-48} \ \frac{c^2}{г \cdot см}$$

немесе $8\pi k / c^2 = 1{,}86 \cdot 10^{-27}$ см/г.

Өте кіші сан: кеңістік-уақытты байқалатындай қисайту үшін үлкен энергия тығыздығы қажет — сондықтан гравитация тек астрономиялық масштабта маңызды.

Сол жақ — геометрия, оң жақ — материя.

$R_{ik} - 1/2\, g_{ik} R$ = $8\pi / c^4\, T_{ik}$

кеңістік-уақыт геометриясы — материяның таралуы

Материя кеңістік-уақыттың қалай қисаятынын анықтайды; қисықтық материяның қалай қозғалатынын анықтайды.

Эйнштейн теңдеулерінің қасиеттері

- **Сызықсыз:** суперпозиция принципі орындалмайды; ол тек әлсіз өрістерде (Ньютон шегінде) жуық түрде орындалады.
- **Бостықта** $T_{ik} = 0 \Rightarrow R_{ik} = 0$ (9.15). Бұл кеңістіктің жазықтығын білдірмейді: ол үшін күштірек $R_{iklm} = 0$ шарты керек.
- **Тек электромагниттік өріс** болса, $T = 0 \Rightarrow R = 0$: скаляр қисықтық нөлге тең.
- **Сақталу заңы теңдеулерге кіреді:** сол жағының дивергенциясы (8.10) бойынша тепе-тең нөл, демек $T^{k}_{i;k} = 0$ (9.16) өріс теңдеулерінің салдары.

Қасиет	Максвелл	Эйнштейн
Сызықтық (суперпозиция)	иә	жоқ
Өріс көзі	заряд пен ток	энергия-импульс T_{ik}
Көздің қозғалыс теңдеулері өріс теңдеулерінде бар ма?	жоқ — зарядтар қозғалысын еркін беруге болады	иә — материяның қозғалыс теңдеулері кіреді

Электродинамикамен салыстыру

Максвелл теңдеулеріне тек зарядтың сақталуы кіреді: зарядтардың таралуы мен қозғалысын еркін беруге болады.

Эйнштейн теңдеулеріне материяның **қозғалыс теңдеулері** де кіреді (мысалы, шаң бөлшектерінің геодезиялық қозғалысы).

Сондықтан материяның таралуы мен қозғалысын еркін беруге болмайды — олар өріспен бір мезгілде анықталады.

Толық жүйе үшін заттың **күй теңдеуі** $p = p(\varepsilon)$ қосылуы керек.

Белгісіздер саны және бастапқы шарттар

- Координаттарды еркін түрлендіріп, 10 g_{ik}-ның 4-еуін алдын ала таңдауға болады ⇒ тек **6** тәуелсіз функция.
- 4-жылдамдық $u_i u^i = 1$ байланысымен ⇒ **3** тәуелсіз; қосымша — ε (немесе p).
- Барлығы: $6 + 3 + 1 = 10$ белгісіз — (9.11)-тің 10 теңдеуі. Бостықта: 6 белгісіз, 10 теңдеу $R_{ik} = 0$ төрт тепе-теңдікпен (8.10) байланысқан.

Уақыт бойынша екінші туындылар тек 6 кеңістіктік $g_{\alpha\beta}$ үшін кіреді. 0-0 және 0-α компоненттеріне сәйкес теңдеулер — тек бірінші туындылармен:

$$R^0_0 - \frac{1}{2}R = \frac{8\pi k}{c^4}T^0_0, \qquad R^0_\alpha = \frac{8\pi k}{c^4}T^0_\alpha \tag{9.17}$$

Бұлар — бастапқы мәндерге қойылатын «байланыс» (шектеу) теңдеулері.

Физикалық еркін функциялар

Бастапқы шарттарда $g_{\alpha\beta}$ пен $\partial g_{\alpha\beta}/\partial t$ беріледі; g_{0i} мен олардың туындылары (9.17)-ден анықталады немесе координаттарды таңдауға байланысты.

Санақ жүйесін таңдауға тәуелсіз «физикалық» функциялар саны — **8:**

материяның тығыздығы + жылдамдықтың 3 компоненті + еркін гравитациялық өрісті сипаттайтын 4 шама.

Бостықта — тек 4 (гравитациялық толқындардың екі поляризациясы, 15-дәріс).

Қорытынды

- Энергия-импульс тензоры T_{ik} — энергия мен импульстің тығыздықтары мен ағындары; идеал сұйық үшін $T_{ik} = (p + \varepsilon)u_i u_k - p g_{ik}$.
- Қисық кеңістік-уақытта $T^k_{i;k} = 0$ — бұл материя мен өріс арасындағы энергия алмасуын қамтиды.
- Метрикалық анықтама: $\delta S_m = \frac{1}{2c}\int T_{ik}\delta g^{ik}\sqrt{-g}\, d\Omega$. Гравитациялық өріс әсері $S_g = -\frac{c^3}{16\pi k}\int R\sqrt{-g}\, d\Omega$.
- Эйнштейн теңдеулері $R_{ik} - \frac{1}{2}g_{ik}R = \frac{8\pi k}{c^4}T_{ik}$: сызықсыз, материяның қозғалыс теңдеулерін қамтиды.

Негізгі формулалар

$$T_{ik} = (p + \varepsilon)u_i u_k - p g_{ik}$$

$$T^k_{i;k} = 0$$

$$S_g = -\frac{c^3}{16\pi k}\int R\sqrt{-g}\, d\Omega$$

$$R_{ik} - \frac{1}{2}g_{ik}R = \frac{8\pi k}{c^4}T_{ik}$$

Келесі дәріс: әлсіз өріс және Ньютон шегі.



Пайдаланылған әдебиеттер

1. Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М. Теориялық физика. II том: Өріс теориясы: оқулық / ауд. Т.Ә. Қожамқұлов, Н. Қойшыбаев. – Алматы: Қазақ университеті, 2009. – 563 б.
2. Бейсен Н.Ә. Электродинамика. – Алматы: Қазақ университеті, 2010.
3. Мармо С.И., Фролов М.В. Лекции по электродинамике, ч. 1–2. – Воронеж: ИПЦ ВГУ, 2009.
4. Топтыгин И.Н. Современная электродинамика. – Москва–Ижевск: ИКИ, 2002.
5. Матвеев А.Н. Электродинамика и теория относительности. – Москва: Высшая школа, 1985.
6. Джексон Дж. Классическая электродинамика. – Москва: Мир, 1988.
7. Griffiths D.J. Introduction to Electrodynamics. – New Jersey: Addison-Wesley, 2013.
8. Гречко Л.Г., Сугаков В.И., Томасевич О.Ф., Федорченко А.М. Задачи по теоретической физике. – Мир, 1997.
9. Батыгин В.В., Топтыгин И.Н. Сборник задач по электродинамике. – Москва: НИЦ, 2002.