Дәріс 8

Қисықтық II: Риман, Риччи және скаляр қисықтық, Бьянки тепе-теңдігі, Эйнштейн тензоры

Қауымдастырылған профессор
Уразалина Айнур Адилхановна

Дәріс мақсаты

Дәрістің мақсаты: Риман қисықтық тензорының алгебралық және дифференциалдық қасиеттерін зерттеу және одан гравитациялық өріс теңдеулеріне қажет екінші рангілі тензорларды құру.

Симметриялар, тәуелсіз компоненттер саны, Бьянки тепе-теңдігі; Риччи тензоры мен скаляр қисықтық.

Жиырылған Бьянки тепе-теңдігінен дивергенциясы нөлге тең Эйнштейн тензорын алу — Эйнштейн теңдеулерінің сол жағы.

Дәріс жоспары

- Ковариантты компоненттер R_{iklm}
- Симметрия қасиеттері
- Тәуелсіз компоненттер саны
- Бьянки тепе-теңдігі
- Риччи тензоры
- Скаляр қисықтық, екіөлшемді бет
- Жиырылған Бьянки тепе-теңдігі
- Эйнштейн тензоры
- Вейль тензоры, физикалық мағына

Қисықтық тензорының ковариантты компоненттері

Симметрия қасиеттерін көру үшін ковариантты компоненттерге өтеміз: $R_{iklm} = g_{in}R^{n}_{klm}$. Қарапайым түрлендірулерден:

$$R_{iklm} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial^2 g_{im}}{\partial x^k \partial x^l} + \frac{\partial^2 g_{kl}}{\partial x^i \partial x^m} - \frac{\partial^2 g_{il}}{\partial x^k \partial x^m} - \frac{\partial^2 g_{km}}{\partial x^i \partial x^l}\right) + g_{np}\left(\Gamma^n_{kl}\Gamma^p_{im} - \Gamma^n_{km}\Gamma^p_{il}\right) \tag{8.1}$$

- Бірінші бөлік — метриканың екінші туындыларына **сызықты**; екінші бөлік — бірінші туындылардың квадраттары.
- Жергілікті-геодезиялық жүйеде $\Gamma = 0$, сондықтан нүктеде тек екінші туындылар қалады — симметрияларды тексеру оңай.
- Қисықтық тензоры g_{ik}-ның екінші туындыларынан тұратын, оларға сызықты тәуелді жалғыз тензор (дәлірек айтқанда, барлық осындай тензорлар R_{iklm} мен g_{ik} арқылы құрылады).

Неге екінші туындылар?

g_{ik} — нүктеде галилейлік түрге келеді.

∂g (Γ) — нүктеде нөлге айналады.

$\partial^2 g$ — нүктеде толық жойылмайды: 100 екінші туындының 80-ін ғана координаттарды таңдау арқылы жоюға болады.

Қалған 20 шама — қисықтық тензорының 20 тәуелсіз компоненті.

Симметрия қасиеттері

(8.1)-ден тікелей шығады:

$$R_{iklm} = -R_{kilm} = -R_{ikml} \qquad (8.2)$$

$$R_{iklm} = R_{lmik} \qquad (8.3)$$

$$R_{iklm} + R_{imkl} + R_{ilmk} = 0 \qquad (8.4)$$

- Тензор ik және lm жұптарының әрқайсысы бойынша **антисимметриялы**, ал жұптардың орнын алмастыруға қатысты **симметриялы**.
- Сондықтан бір жұптағы индекстер бірдей болғанда компонент нөлге тең: $R_{iilm} = R_{ikll} = 0$.
- (8.4) — кез келген үш индекс бойынша циклдік қосынды нөлге тең (қалған циклдік қатынастар (8.2–3)-тен шығады).

(8.3)-ті тексеру

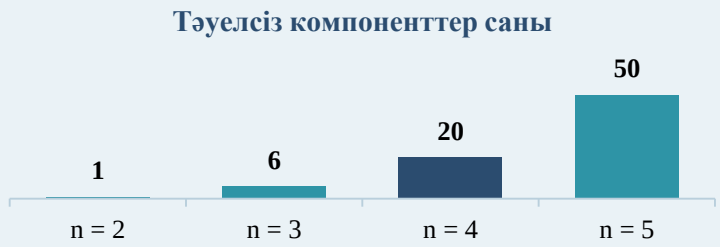
Жергілікті-геодезиялық жүйеде:

$$R_{lmik} = \frac{1}{2}\left(g_{lk,mi} + g_{mi,lk} - g_{li,mk} - g_{mk,li}\right)$$

g_{ik} симметриялы және туындылардың реті маңызды емес: $g_{lk,mi} = g_{km,il}\cdots$

Мүшелерді салыстырсақ, (8.1)-дегі R_{iklm}-мен дәл сәйкес.

Белгілеу: $g_{ik,lm} \equiv \partial^2 g_{ik}/\partial x^l \partial x^m$.



Симметриялардан кейін: $n^2(n^2-1)/12$

Тәуелсіз компоненттер саны

R_{iklm}-ды индекс жұптарының симметриялы «матрицасы» ретінде қарастырамыз. Әр антисимметриялы жұп $n(n-1)/2$ мән қабылдайды; симметриялы матрицаның элементтерінен (8.4) байланыстарын алып тастаймыз.

Өлшем n	Жұптар	Есептеу	Тәуелсіз
2 (бет)	12	1	**1**
3 (кеңістік)	23, 31, 12	3 + 3 = 6	**6**
4 (кеңістік-уақыт)	01, 02, 03, 23, 31, 12	6 + 15 − 1 = 20	**20**

4 өлшемде (8.4) тек бір жаңа шарт береді: $R_{0123} + R_{0312} + R_{0231} = 0$ (8.13). Жалпы формула: $n^2(n^2-1)/12$.

Инварианттар

Нүктеде галилейлік жүйені Лоренц бұрылыстарымен (6 параметр) бұрып, 6 компонентті нөлге айналдыруға болады.

Демек, 4-кеңістіктің қисықтығы әр нүктеде **14** шамамен анықталады.

Бостықта ($R_{ik} = 0$) — 10 компонент, «каноникалық» түрде 4 инвариант (Петров жіктемесі).

2 өлшемде — 1 компонент (гаусстық қисықтық), 3 өлшемде — 6 (симметриялы $P_{\alpha\beta}$ тензорымен бірдей).

Бьянки тепе-теңдігі

Қисықтық тензорының ковариантты туындылары үшін дифференциалдық тепе-теңдік:

$$R^n_{ikl;m} + R^n_{imk;l} + R^n_{ilm;k} = 0 \qquad (8.5)$$

Дәлелдеу. Жергілікті-геодезиялық жүйеде $\Gamma = 0$, сондықтан (7.4)-ті дифференциалдағанда нүктеде:

$$R^n_{ikl;m} = \frac{\partial^2 \Gamma^n_{il}}{\partial x^m \partial x^k} - \frac{\partial^2 \Gamma^n_{ik}}{\partial x^m \partial x^l}$$

- k, l, m индекстерін циклдік алмастырып қоссақ, барлық мүшелер жұп-жұбымен қысқарады.
- (8.5) тензорлық теңдік болғандықтан, бір жүйеде орындалса — барлық жүйеде орындалады.

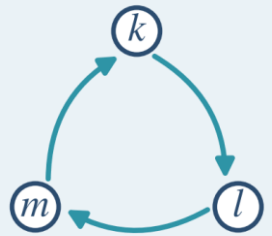
Электродинамикамен ұқсастық

Өріс тензоры потенциалдан алынады: $F_{ik} = \partial_i A_k - \partial_k A_i$. Осыдан тепе-теңдік:

$$\frac{\partial F_{ik}}{\partial x^l} + \frac{\partial F_{li}}{\partial x^k} + \frac{\partial F_{kl}}{\partial x^i} = 0$$

— Максвеллдің бірінші жұп теңдеулері.

Дәл осылай R Γ-дан құрылғандықтан, Бьянки тепе-теңдігі автоматты түрде орындалады.



k, l, m индекстерін циклдік алмастырып алынған үш мүшенің қосындысы нөлге тең (8.5).

Риччи тензоры

Қисықтық тензорынан жиыру арқылы екінші рангілі тензор құруға болады. Мұндай жиыру тек бір тәсілмен жүргізіледі: i, k немесе l, m бойынша жиыру антисимметрия салдарынан нөл береді, ал басқа жұптар таңба дәлдігімен бірдей нәтиже береді.

$$R_{ik} = g^{lm} R_{limk} = R^{l}_{ilk} \tag{8.6}$$

(7.4) бойынша:

$$R_{ik} = \frac{\partial \Gamma^{l}_{ik}}{\partial x^{l}} - \frac{\partial \Gamma^{l}_{il}}{\partial x^{k}} + \Gamma^{l}_{ik}\Gamma^{m}_{lm} - \Gamma^{m}_{il}\Gamma^{l}_{km} \tag{8.7}$$

$$R_{ik} = R_{ki} \tag{8.8}$$

Риччи тензоры симметриялы: 10 компонент — метрикалық тензормен бірдей.

Белгілеу туралы

Әдебиетте R_{ik} кейде R_{iklm}-ды бірінші және соңғы индекстер бойынша жиыру арқылы анықталады.

Айырмашылық тек таңбада.

Сондай-ақ метриканың сигнатурасы ($+\,-\,-\,-$ немесе $-\,+\,+\,+$) мен Риман тензорының таңбасы әр оқулықта әр түрлі болуы мүмкін — формулаларды салыстырғанда ескеру керек.

Бұл курста Ландау–Лифшиц келісімі қолданылады.



Скаляр қисықтық. Екіөлшемді бет

Риччи тензорын жиырсақ — кеңістіктің **скаляр қисықтығы**:

$$R = g^{ik}R_{ik} = g^{il}g^{km}R_{iklm} \qquad (8.9)$$

Екіөлшемді бетте бір ғана тәуелсіз компонент R_{1212} бар ($\gamma = \det\gamma_{ab}$):

$$R = \frac{2R_{1212}}{\gamma}, \qquad \frac{R}{2} = K = \frac{1}{\rho_1\rho_2} \qquad (8.11–12)$$

- K — беттің гаусстық қисықтығы, ρ_1, ρ_2 — бас қисықтық радиустары.
- Қисықтық центрлері беттің бір жағында болса $K > 0$ (сфера), екі жағында болса $K < 0$ (ершік тәрізді бет).
- Цилиндрде $\rho_2 = \infty$, $K = 0$: ол ішкі геометриясы бойынша жазық (жазықтыққа жазылады).

Мысал: сфера

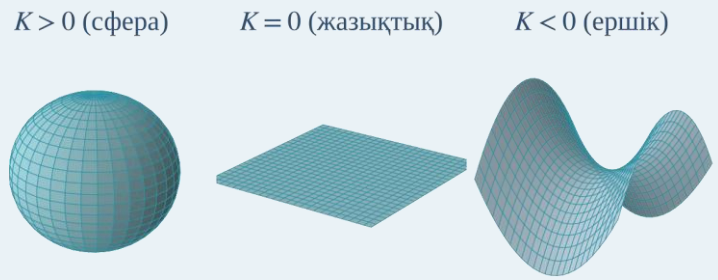
7-дәрістен $R_{\theta\varphi\theta\varphi} = a^2\sin^2\theta$. (8.6) бойынша:

$$R_{\theta\theta} = 1, \qquad R_{\varphi\varphi} = \sin^2\theta$$

яғни

$$R_{ik} = \frac{1}{a^2}g_{ik}, \qquad R = \frac{2}{a^2}$$

$K = R/2 = 1/a^2$ — 7-дәрістегі нәтижемен сәйкес; $\rho_1 = \rho_2 = a$.



Гаусс қисықтығы $K = R/2$ таңбасы бойынша үш жағдай.

Жиырылған Бьянки тепе-теңдігі

(8.5)-ті n, l бойынша жиырамыз; $R^n_{ikn} = -R_{ik}$, $R^n_{inm} = R_{im}$ екенін ескереміз:

$$-R_{ik;m} + R^n_{imk;n} + R_{im;k} = 0$$

g^{ik}-ға көбейтіп ($g_{ik;l} = 0$), ортаңғы мүшеде (8.2–3) симметрияларын қолдансақ, $g^{ik}R^n_{imk} = R^n_m$:

$$-\frac{\partial R}{\partial x^m} + 2R^n_{m;n} = 0$$

$$R^k_{i;k} = \frac{1}{2}\frac{\partial R}{\partial x^i} \qquad (8.10)$$

Риччи тензорының дивергенциясы скаляр қисықтықтың градиентімен анықталады — бұл төрт дифференциалдық тепе-теңдік.

Ортаңғы мүше

Жұптарды алмастырып (8.3), содан кейін екі жұпта да индекстерді ауыстырсақ (8.2):

$$g^{ik}R_{pimk} = g^{ik}R_{kmip} = R^i_{mip} = R_{mp}$$

Сонда:

$$g^{ik}g^{np}R_{pimk;n} = R^n_{m;n}$$

Бірінші және үшінші мүшелер: $-R_{;m}$ және $R^k_{m;k}$.

Эйнштейн тензоры

(8.10)-ды $\left(R_i^k - \frac{1}{2}\delta_i^k R\right)_{;k} = 0$ түрінде жазуға болады. Демек, тензор

$$G_{ik} = R_{ik} - \frac{1}{2} g_{ik} R$$

тепе-тең түрде дивергенциясыз:

$$G^k_{i;k} = 0$$

- G_{ik} симметриялы, g_{ik}-ның екінші туындыларына сызықты; изі $G = G^i_i = -R$.
- Энергия-импульс тензоры да дивергенциясыз: $T^k_{i;k} = 0$. Сондықтан Эйнштейн теңдеулерінің сол жағы дәл осы тензор: $G_{ik} \propto T_{ik}$ (9-дәріс).

Екіөлшемді жағдай

Бетте $R_{abcd} = K(g_{ac}g_{bd} - g_{ad}g_{bc})$, сондықтан:

$$R_{ab} = K g_{ab} = \frac{1}{2} R g_{ab}$$

Демек, 2 өлшемде $G_{ab} \equiv 0$ — Эйнштейн тензоры тек $n \geq 3$ өлшемде мағыналы.

Мысалы, сфера үшін $R_{ik} = g_{ik}/a^2$, $R = 2/a^2$, $G_{ik} = 0$.

Вейль тензоры. Риччи мен Вейльдің мағынасы

R_{ik} арқылы өрнектелетін бөлікті алып тастасақ, барлық жиыруы нөлге тең тензор қалады

$$C_{iklm} = R_{iklm} - \frac{1}{2}(R_{il}g_{km} - R_{im}g_{kl} + R_{km}g_{il} - R_{kl}g_{im}) + \frac{R}{6}(g_{il}g_{km} - g_{im}g_{kl}) \qquad (8.14)$$

- C_{iklm} — **Вейль тензоры**: R_{iklm}-ның барлық симметрияларына ие, ал кез келген жұп бойынша жиыруы нөлге тең.
- 20 компонент = 10 (Риччи) + 10 (Вейль).
- Бостықта $R_{ik} = 0$, сондықтан $R_{iklm} = C_{iklm}$: қисықтық толығымен Вейль бөлігімен беріледі.



Геометриялық мағынасы

Риччи бөлігі — сынақ бөлшектерден тұратын шағын «бұлттың» көлемінің өзгерісі (геодезиялардың фокусталуы). Эйнштейн теңдеулері бойынша ол материямен тікелей байланысты.

Вейль бөлігі — көлемді сақтай отырып пішінді өзгерту: тасқындық созылу мен сығылу. Ол бостықта да бар — алыс денелердің өрісі мен гравитациялық толқындар.

Пайдаланылған әдебиеттер

1. Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М. Теориялық физика. II том: Өріс теориясы: оқулық / ауд. Т.Ә. Қожамқұлов, Н. Қойшыбаев. – Алматы: Қазақ университеті, 2009. – 563 б.
2. Бейсен Н.Ә. Электродинамика. – Алматы: Қазақ университеті, 2010.
3. Мармо С.И., Фролов М.В. Лекции по электродинамике, ч. 1–2. – Воронеж: ИПЦ ВГУ, 2009.
4. Топтыгин И.Н. Современная электродинамика. – Москва–Ижевск: ИКИ, 2002.
5. Матвеев А.Н. Электродинамика и теория относительности. – Москва: Высшая школа, 1985.
6. Джексон Дж. Классическая электродинамика. – Москва: Мир, 198.
7. Griffiths D.J. Introduction to Electrodynamics. – New Jersey: Addison-Wesley, 2013.
8. Гречко Л.Г., Сугаков В.И., Томасевич О.Ф., Федорченко А.М. Задачи по теоретической физике. – Мир, 1997.
9. Батыгин В.В., Топтыгин И.Н. Сборник задач по электродинамике. – Москва: НИЦ, 2002.