Дәріс 3

Тензорлар I: анықтама, түрлену заңы, базис және компоненттер

Қауымдастырылған профессор
Уразалина Айнур Адилхановна

Дәріс мақсаты

Дәрістің мақсаты: кез келген координаттар жүйесіндегі 4-тензор ұғымын оның түрлену заңы арқылы енгізу және тензорды координаттарға тәуелсіз объект, ал оның компоненттерін — таңдалған базистегі коэффициенттер ретінде түсіну.

Ковариантты жазу принципінің мағынасы: тензорлық теңдеу бір координаттар жүйесінде орындалса, ол барлық жүйеде орындалады.

Тензор еместің мысалын көрсету ($\partial A_i/\partial x^k$) — келесі дәрістердегі ковариантты туындыға дайындық.

Дәріс жоспары

- Неге тензорлар қажет
- Скаляр өріс
- Тензордың анықтамасы: түрлену заңы
- Якоби матрицасы және оның қасиеттері
- Мысалдар және тензор емес шамалар
- Симметриялы және антисимметриялы тензорлар
- Координаттық базис
- Тензорлық базис, компоненттер
- Мысал: полярлық және сфералық координаттар

Неге тензорлар қажет?

ЖСТ-да санақ жүйесін таңдау еркін, сондықтан табиғат заңдары кез келген 4-өлшемді координаттар жүйесінде орындалатындай — **ковариантты** түрде — жазылуы тиіс.

Тензорлар дәл осындай жазуға мүмкіндік береді: тензорлардың барлық компоненттері бір координаттар жүйесінде нөлге тең болса, түрлену заңы сызықты және біртекті болғандықтан, олар кез келген басқа жүйеде де нөлге тең.

$$T^{ik} = 0 \Rightarrow T'^{ik} = 0$$

Сондықтан физикалық заңды $A^{ik} = B^{ik}$ түрінде (екі жағы да тензор) жазсақ, ол барлық координаттар жүйесінде бірдей түрде орындалады.

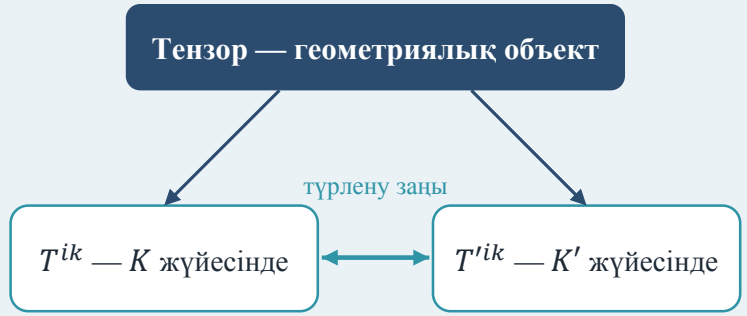
Скаляр — 0 рангілі тензор

Скаляр өріс φ координаттарды түрлендіргенде өз мәнін сақтайды:

$$\varphi'(x') = \varphi(x)$$

Мұнда x пен x' — бір нүктенің екі жүйедегі координаттары.

Мысалдар: интервал ds, меншікті уақыт $d\tau$, бөлшектің массасы, $A^i B_i$ скаляр көбейтіндісі.



Тензордың анықтамасы: түрлену заңы

Түрлі рангілі 4-тензорлар векторлар сияқты анықталады. **2 рангілі контравариантты тензор** A^{ik} — екі контравариантты вектордың көбейтіндісі сияқты түрленетін 16 шама:

$$A^{ik} = \frac{\partial x^i}{\partial x'^l}\frac{\partial x^k}{\partial x'^m}A'^{lm} \qquad (2.5)$$

$$A_{ik} = \frac{\partial x'^l}{\partial x^i}\frac{\partial x'^m}{\partial x^k}A'_{lm} \qquad (2.6)$$

Аралас тензор — бір индексі контравариантты, бір индексі ковариантты:

$$A^i_k = \frac{\partial x^i}{\partial x'^l}\frac{\partial x'^m}{\partial x^k}A'^l_m \qquad (2.7)$$

Жалпы ереже: әр жоғарғы индекске $\partial x/\partial x'$, әр төменгі индекске $\partial x'/\partial x$ көбейткіші сәйкес келеді:

$$T^{i_1\ldots i_p}_{k_1\ldots k_q} = \frac{\partial x^{i_1}}{\partial x'^{l_1}}\cdots\frac{\partial x^{i_p}}{\partial x'^{l_p}}\frac{\partial x'^{m_1}}{\partial x^{k_1}}\cdots\frac{\partial x'^{m_q}}{\partial x^{k_q}}T'^{l_1\ldots l_p}_{m_1\ldots m_q}$$

(p,q) типті тензордың 4^{p+q} компоненті бар; ранг $p+q$. Вектор — 1 рангілі, скаляр — 0 рангілі тензор.

Түрлендіру коэффициенттерінің қасиеттері

Түрлену заңына тек екі матрица кіреді — тура және кері түрлендірулердің Якоби матрицалары:

$$\Lambda^i_k = \frac{\partial x^i}{\partial x'^k}, \qquad (\Lambda^{-1})^k_l = \frac{\partial x'^k}{\partial x^l}$$

Күрделі функцияны дифференциалдау ережесінен олар өзара кері:

$$\frac{\partial x^i}{\partial x'^k}\frac{\partial x'^k}{\partial x^l} = \frac{\partial x^i}{\partial x^l} = \delta^i_l$$

- Дәл осы қасиет $A^i B_i$ скаляр болатынын және жоғарғы/төменгі индекстердің «жойылатынын» қамтамасыз етеді.
- Коэффициенттер координаттарға тәуелді: тензор кеңістік-уақыттың **нүктесінде** анықталады, ал оның барлық нүктелердегі мәндері — тензорлық өріс.
- Лоренц түрлендірулерінде Λ^i_k тұрақты — 6-дағы анықтамалар осы жалпы анықтаманың дербес жағдайы.

Транзитивтілік

$x \to x' \to x''$ екі рет түрлендірсек, коэффициенттер көбейтіледі:

$$\frac{\partial x^i}{\partial x''^k} = \frac{\partial x^i}{\partial x'^l}\frac{\partial x'^l}{\partial x''^k}$$

Сондықтан «тензор» ұғымы жүйені таңдаудан тәуелсіз: бір жүйеде тензор болған шама кез келген жүйеде тензор.

Түрлендіру қайтымды болуы үшін якобиан нөлден өзгеше:

$$J = \det\left(\frac{\partial x^i}{\partial x'^k}\right) \neq 0$$

Мысалдар және тензор емес шамалар

- $dx^i dx^k$ — 2 рангілі контравариантты тензор: (2.1)-ді екі рет қолдансақ, (2.5) шығады.
- g_{ik} — ковариантты тензор: $g_{ik}dx^i dx^k = ds^2$ скаляр, ал $dx^i dx^k$ — кез келген.
- δ_k^i — аралас тензор, компоненттері барлық жүйеде бірдей: (2.7) бойынша $\frac{\partial x^i}{\partial x'^l}\frac{\partial x'^l}{\partial x^k} = \delta_k^i$.
- $\partial^2\varphi/\partial x^i \partial x^k$ — галилейлік жүйеде тензор, бірақ қисық сызықты жүйеде тензор емес.

Тензор емес мысал: ковариантты вектордың туындысы. (2.4)-ті дифференциалдаймыз:

$$\frac{\partial A_i}{\partial x^k} = \frac{\partial x'^l}{\partial x^i}\frac{\partial x'^m}{\partial x^k}\frac{\partial A'_l}{\partial x'^m} + \frac{\partial^2 x'^l}{\partial x^i \partial x^k}A'_l$$

- Бірінші мүше (2.6) заңына сәйкес, бірақ екінші мүше артық — $\partial A_i/\partial x^k$ тензор сияқты түрленбейді.
- Екінші туындылар $\partial^2 x'^l/\partial x^i \partial x^k$ тек сызықты түрлендірулерде (мысалы, Лоренц) нөлге тең.
- Себебі: dA_i — әр түрлі нүктелердегі векторлардың айырмасы, ал векторлар әр нүктеде әр түрлі түрленеді.
- Шешімі — ковариантты туынды (5-дәріс).

Симметриялы және антисимметриялы тензорлар

Егер $A^{ik} = A^{ki}$ болса, тензор **симметриялы**, ал $A^{ik} = -A^{ki}$ болса, **антисимметриялы** деп аталады. (2.5) бойынша бұл қасиеттер координаттарды түрлендіргенде сақталады:

$$A'^{ki} = \frac{\partial x'^k}{\partial x^m}\frac{\partial x'^i}{\partial x^l}A^{ml} = \frac{\partial x'^i}{\partial x^l}\frac{\partial x'^k}{\partial x^m}A^{lm} = A'^{ik}$$

Кез келген 2 рангілі тензорды симметриялы және антисимметриялы бөліктерге бір мәнді жіктеуге болады:

$$A^{ik} = \frac{1}{2}\left(A^{ik} + A^{ki}\right) + \frac{1}{2}\left(A^{ik} - A^{ki}\right)$$

- Симметриялы бөлікте 10, антисимметриялы бөлікте 6 тәуелсіз компонент бар: $10 + 6 = 16$.
- Метрикалық тензор g_{ik} — симметриялы (10 функция); электромагниттік өріс тензоры F_{ik} — антисимметриялы (6 компонент: **E** және **H**).

Неге бұл маңызды?

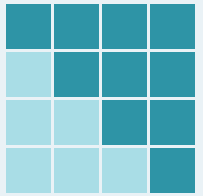
Симметрия — тензордың өзінің, координаттарға тәуелсіз қасиеті.

Аралас A^i_k тензоры үшін «симметрия» жалпы алғанда мағынасыз: индекстер әр түрлі түрленеді.

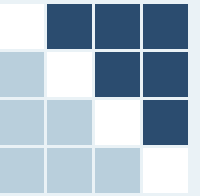
Симметриялы тензор мен антисимметриялы тензордың толық жинақталған көбейтіндісі нөлге тең:

$$S_{ik}A^{ik} = 0$$

Бұл тепе-теңдік кейін (мысалы, энергия-импульс тензорында) жиі қолданылады.



симметриялы: 10



антисимметриялы: 6

Координаттық базис

Кеңістіктің әр нүктесінде координаттық сызықтарға жанама векторлар $\mathbf{e}_i$ — **координаттық базис** — енгіземіз. Шексіз аз ығысу:

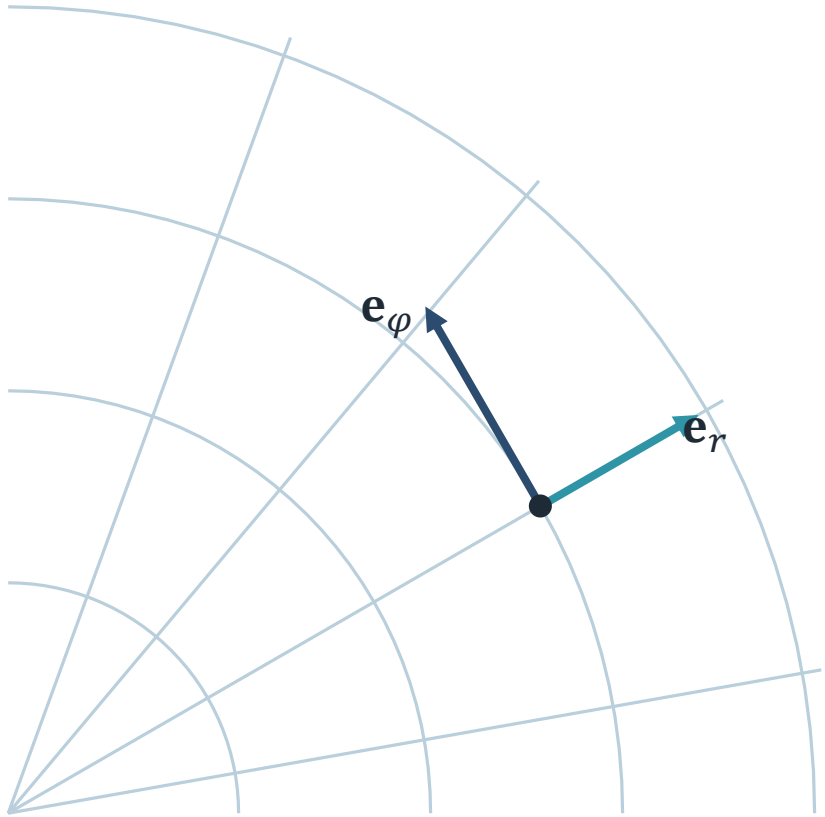
$$d\mathbf{r} = \mathbf{e}_i\, dx^i \;\Rightarrow\; ds^2 = (\mathbf{e}_i \cdot \mathbf{e}_k) dx^i dx^k$$

$$g_{ik} = \mathbf{e}_i \cdot \mathbf{e}_k$$

Кез келген вектор осы базис бойынша жіктеледі; $\mathbf{e}_i$ мен A^i кері заңдармен түрленеді:

$$\mathbf{A} = A^i \mathbf{e}_i, \qquad \mathbf{e}'_k = \frac{\partial x^i}{\partial x'^k}\mathbf{e}_i, \qquad A'^k = \frac{\partial x'^k}{\partial x^i} A^i$$

Сондықтан $\mathbf{A} = A'^k \mathbf{e}'_k = A^i \mathbf{e}_i$: **объект өзгермейді, тек оның компоненттері өзгереді.** Базистік векторлар ковариантты, компоненттер контравариантты түрленеді.



1-сурет. Полярлық координаттардағы базис: векторлар нүктеден нүктеге өзгереді, $|\mathbf{e}_\varphi| = r$.

Тензорлық базис және компоненттер

2 рангілі тензор — базистік векторлардың тензорлық көбейтінділері бойынша жіктелетін объект:

$$\mathbf{T} = T^{ik}\,\mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}_k$$

Базисті ауыстырғанда $\mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}_k$ екі $\partial x/\partial x'$ көбейткішімен түрленеді, сондықтан $\mathbf{T}$ өзгермеуі үшін T^{ik} компоненттері (2.5) заңымен түрленуі керек. **Түрлену заңы — объектінің инварианттылығының салдары.**

Дуалды (кері) базис $\mathbf{e}^i$ былай анықталады:

$$\mathbf{e}^i \cdot \mathbf{e}_k = \delta^i_k, \qquad \mathbf{e}^i = g^{ik}\mathbf{e}_k$$

Ол ковариантты компоненттерге сәйкес келеді: $\mathbf{A} = A_i\mathbf{e}^i$. Толығырақ — 4-дәрісте.

Компоненттерді табу

Скаляр көбейтінді арқылы:

$$A^i = \mathbf{A}\cdot\mathbf{e}^i, \qquad A_i = \mathbf{A}\cdot\mathbf{e}_i$$

Демек $A_i = g_{ik}A^k$ — индексті түсіру ережесі базистен тікелей шығады.

Компоненттер — объектінің өзі емес, оның таңдалған базистегі «координаттары». Сондықтан компоненттердің өзгеруі әрқашан физикалық өзгерісті білдірмейді.

Мысал: жазықтықтағы полярлық координаттар

$x = r\cos\varphi,\ y = r\sin\varphi$. Базистік векторлар $\mathbf{e}_i = \partial\mathbf{r}/\partial x^i$:

$$\mathbf{e}_r = (\cos\varphi, \sin\varphi), \qquad \mathbf{e}_\varphi = (-r\sin\varphi, r\cos\varphi)$$

Метрикалық тензор және оған кері тензор:

$$g_{ik} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & r^2 \end{pmatrix}, \qquad g^{ik} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1/r^2 \end{pmatrix}$$

Бөлшектің жылдамдығы $v^i = dx^i/dt$:

$$v^i = (\dot r, \dot\varphi), \qquad v_i = g_{ik}v^k = (\dot r, r^2\dot\varphi)$$

- $v^i v_i = \dot r^2 + r^2\dot\varphi^2$ — белгілі v^2 өрнегі, кез келген жүйеде бірдей.
- $v_\varphi = r^2\dot\varphi$ — бірлік массаға келетін импульс моменті: ковариантты компоненттің физикалық мағынасы бар.

Физикалық компоненттер

Өлшенетін шамалар — бірлік векторлар бойынша компоненттер:

$$\hat{\mathbf{e}}_\varphi = \frac{\mathbf{e}_\varphi}{\sqrt{g_{\varphi\varphi}}}, \qquad v_{\hat\varphi} = r\dot\varphi$$

Ортогональ координаттарда:

$$A_{\hat i} = \sqrt{g_{ii}}\,A^i = \frac{A_i}{\sqrt{g_{ii}}}$$

(қосынды жоқ). Контра- және ковариантты компоненттердің өлшемдері әр түрлі болуы мүмкін.

Мысал: сфералық координаттардағы жазық кеңістік-уақыт

Галилейлік жүйеден $x'^i = (ct, x, y, z)$ сфералық координаттарға $x^i = (ct, r, \theta, \varphi)$ өтейік: $x = r\sin\theta\cos\varphi$, $y = r\sin\theta\sin\varphi$, $z = r\cos\theta$. (2.6) бойынша, мысалы:

$$g_{\theta\theta} = \frac{\partial x'^l}{\partial\theta}\frac{\partial x'^m}{\partial\theta}g'_{lm} = -\left[\left(\frac{\partial x}{\partial\theta}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial\theta}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial\theta}\right)^2\right] = -r^2$$

Барлық компоненттерді есептесек:

$$ds^2 = c^2dt^2 - dr^2 - r^2d\theta^2 - r^2\sin^2\theta\, d\varphi^2$$

$$g_{ik} = \mathrm{diag}(1, -1, -r^2, -r^2\sin^2\theta), \qquad g = -r^4\sin^2\theta$$

- g_{ik} координаттарға тәуелді, бірақ кеңістік-уақыт **жазық**: ол координаттарды түрлендіру арқылы галилейлік түрге келеді.
- Демек, g_{ik}-ның тұрақты еместігі өздігінен гравитацияның белгісі емес; гравитацияны координаттарға тәуелсіз анықтау үшін қисықтық тензоры қажет (7–8-дәрістер).

Қорытынды

- Тензор түрлену заңымен анықталады: әр жоғарғы индексте $\partial x/\partial x'$, әр төменгі индексте $\partial x'/\partial x$.
- Тензорлық теңдеу бір жүйеде орындалса, барлық жүйеде орындалады — ЖСТ заңдарын ковариантты жазудың негізі.
- Түрлендіру коэффициенттері нүктеге тәуелді: тензор нүктеде анықталады, тензорлық өріс — барлық нүктелерде.
- $\partial A_i/\partial x^k$ қисық сызықты координаттарда тензор емес.
- Симметрия мен антисимметрия түрлендіруде сақталады; $16 = 10 + 6$.
- Тензор — базиске тәуелсіз объект, компоненттер — оның базистегі коэффициенттері; $g_{ik} = \mathbf{e}_i \cdot \mathbf{e}_k$.

Негізгі формулалар

$$A^{ik} = \frac{\partial x^i}{\partial x'^l}\frac{\partial x^k}{\partial x'^m}A'^{lm}$$

$$A_{ik} = \frac{\partial x'^l}{\partial x^i}\frac{\partial x'^m}{\partial x^k}A'_{lm}$$

$$\mathbf{A} = A^i\mathbf{e}_i, \quad g_{ik} = \mathbf{e}_i \cdot \mathbf{e}_k$$

Келесі дәріс: тензорлар II — ковариантты/контравариантты тензорлар, дуалдық кеңістік, тензорлық алгебра.



Пайдаланылған әдебиеттер

1. Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М. Теориялық физика. II том: Өріс теориясы: оқулық / ауд. Т.Ә. Қожамқұлов, Н. Қойшыбаев. – Алматы: Қазақ университеті, 2009. – 563 б.
2. Бейсен Н.Ә. Электродинамика. – Алматы: Қазақ университеті, 2010.
3. Мармо С.И., Фролов М.В. Лекции по электродинамике, ч. 1–2. – Воронеж: ИПЦ ВГУ, 2009.
4. Топтыгин И.Н. Современная электродинамика. – Москва–Ижевск: ИКИ, 2002.
5. Матвеев А.Н. Электродинамика и теория относительности. – Москва: Высшая школа, 1985.
6. Джексон Дж. Классическая электродинамика. – Москва: Мир, 1988.
7. Griffiths D.J. Introduction to Electrodynamics. – New Jersey: Addison-Wesley, 2013.
8. Гречко Л.Г., Сугаков В.И., Томасевич О.Ф., Федорченко А.М. Задачи по теоретической физике. – Мир, 1997.
9. Батыгин В.В., Топтыгин И.Н. Сборник задач по электродинамике. – Москва: НИЦ, 2002.